17/11/2020

652 $\lim_{x \to 0^+} x^x = 0^0$ F.I. [1]

DOMINIO

$D =]0, +\infty[$

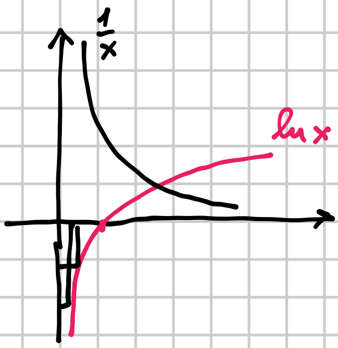
$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \to 0^+} e^{x \cdot \ln x} = e^0 = 1$$

A PARTE

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = 0 \cdot \infty$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0$$

CONFRONTO TRA INFINITI



655 $\lim_{x \to +\infty} \ln x^{\frac{1}{x}}$ [0]

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

657 $\lim_{x \to +\infty} e^{-6x} x^4 = 0 \cdot \infty$ F.I. [0]

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{e^{6x}} = 0$$

INFINITO DI ORDINE SUPERIORE

RISPETTO A x^4 (ANCHE RISP. A $x^{1000000}$)

662 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x + x^2}{e^{2x}} = 0$ [0]

infinito di ordine sup. risp. al numeratore

663 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 + 3e^x}{e^x - x^2} = \frac{\infty}{\infty}$ [3]

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(\frac{x^4}{e^x} + 3\right)}{\cancel{e^x}\left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right)} = \frac{3}{1} = 3$$

$\frac{x^4}{e^x} \to 0$, $\frac{x^2}{e^x} \to 0$

INFINITO DI ORDINE SUP. RISP. AL DEN.

664 $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3 - \ln x + 1} =$ [$+\infty$]

INF. DI ORD. SUP. ....

665 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x + 2e^x}{x^2} =$ [$+\infty$]

INFINITO DI ORD. INF. RISP. AL DEN.

666 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^4 - 4x^2 + 6} = 0$ [0]

Determinare l'ordine di infinito

633 $f(x) = \dfrac{2x-1}{x}$, per $x \to 0$. [1]

$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ perché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

$f(x) = \dfrac{2x-1}{x} \sim \dfrac{-1}{x}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{2x-1}{-1} = 1$

per $x \to 0$ ordine di infinito $= 1$

636 $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 2x}$, per $x \to 0$. è un infinito

$f(x) = \dfrac{1}{[\sin 2x]^2} \sim \dfrac{1}{(2x)^2} = \dfrac{1}{4x^2}$

per $x \to 0$ ordine di infinito $= 2$

Determinare l'ordine di infinitesimo

610 $f(x) = \sin x(e^{2x}-1)$, per $x \to 0$. [2]

$\sin x \cdot (e^{2x}-1) \sim x \cdot 2x = 2x^2$

per $x \to 0$ ordine di infinitesimo $= 2$

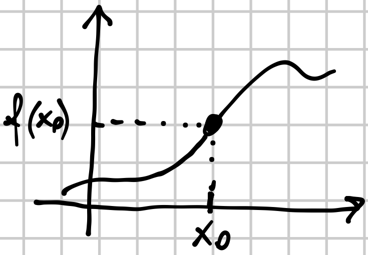
CONTINUITÀ IN UN PUNTO

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ $\quad$ $x_0 \in A$ di accumulazione per A

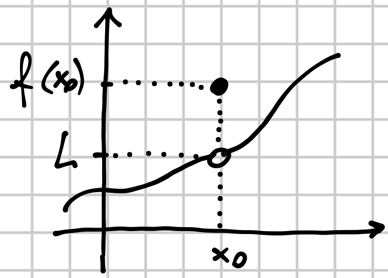
Diciamo che f è CONTINUA IN x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

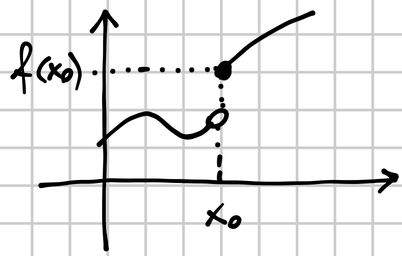
Diciamo che f è DISCONTINUA IN x_0 in caso contrario (cioè se $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ oppure non esiste)



f è CONTINUA IN x_0



f è DISCONTINUA IN x_0 perché $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq f(x_0)$

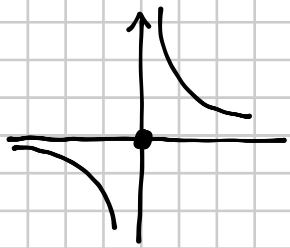


f è DISCONTINUA IN x_0 perché $\lim_{x \to x_0} f(x)$ NON ESISTE

IMPORTANTE

Se una funzione non è definita in x_0, in tale punto essa non è né continua né discontinua!! Semplicemente non ci poniamo il problema della continuità o discontinuità in x_0.

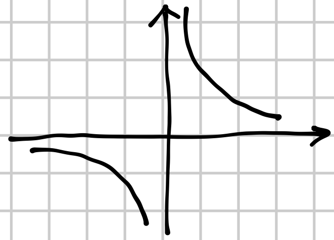
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ f è DISCONTINUA IN 0

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

$g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$



g NON è né CONTINUA né DISCONTINUA in 0

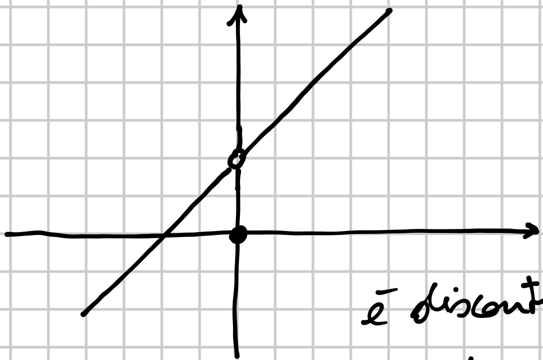
CONTINUITÀ

Diciamo che una funzione è continua se è continua in tutti i punti del suo dominio

ESEMPI

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

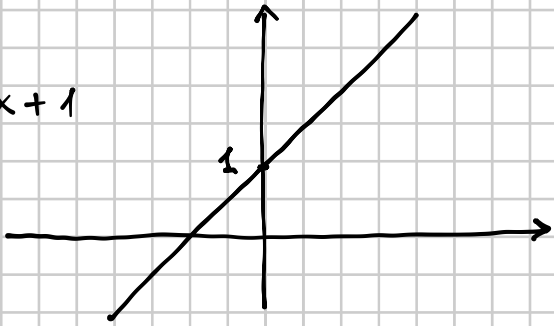
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



è discontinua in 0 e continua in tutti gli altri punti

2) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

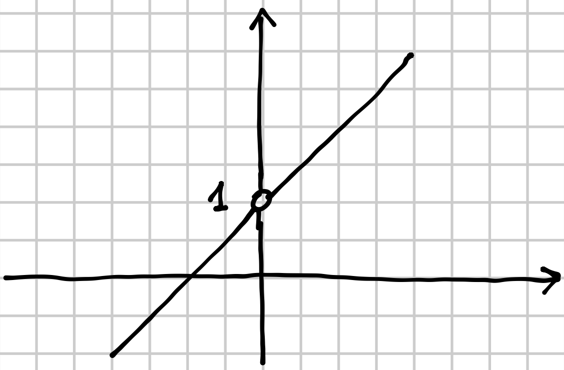
$g(x) = x + 1$



g è continua

3) $h: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$h(x) = x + 1$



h è CONTINUA perché lo è in tutti i punti del suo dominio

4) Tutte le funzioni elementari sono continue.
Somme, prodotti, quozienti, composizioni di funzioni elementari sono continue.

$f(x) = e^{\sqrt{1-\sin x}}$ è continua nel suo dominio (che è $\mathbb{R}$)

$g(x) = \ln(x^2 - 1)$ è continua nel suo dominio

(che è $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$)

$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > 1$

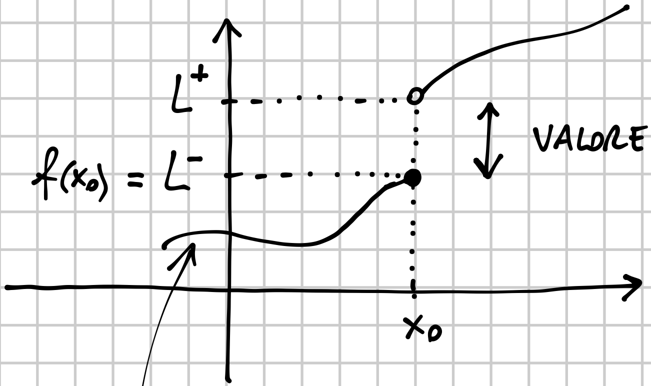
PUNTI DI DISCONTINUITÀ

$f: A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in A$

x_0 SI DICE <u>PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI 1° SPECIE (DI TIPO SALTO)</u>

se $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ (e sono entrambi finiti)

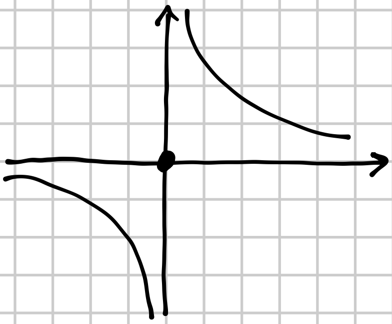


VALORE DEL SALTO $\overbrace{f(x_0^+)}^{\text{LIMITE DESTRO}} - \underbrace{f(x_0^-)}_{\text{LIMITE SINISTRO}}$

in questo caso si può dire che f è <u>continua a sinistra</u> in x_0

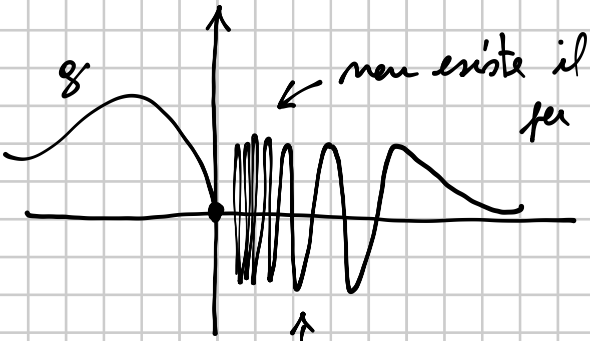
x_0 SI DICE PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI 2° SPECIE

se almeno uno dei 2 limiti destro e sinistro non esiste o è infinito



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

f è discontinua in 0, con una discontinuità di 2° specie (in particolare 0 si dice PUNTO DI INFINITO)



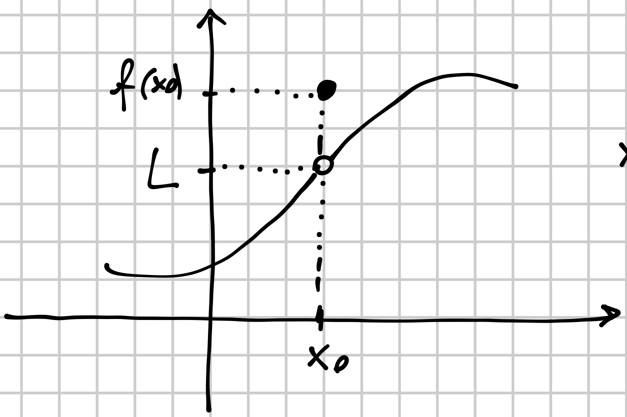
non esiste il limite per $x \to 0^+$

a destra può essere $\sin \frac{1}{x}$

g ha una discontinuità di 2° specie in 0

x_0 è un punto di DISCONTINUITÀ DI 3° SPECIE (ELIMINABILE)

se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ finito ma diverso da $f(x_0)$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq f(x_0)$$

Potrei definire un'altra funzione g tale che

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ L & x = x_0 \end{cases}$$

g è CONTINUA in x_0

SCHEMA RIASSONTIVO DEI TIPI DI DISCONTINUITÁ