13/11/2020

Per quale valore di a questa funzione è continua?

790 $f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) - 2a & \text{se } x \le 0 \\ \dfrac{\cos x - e^x}{2ax} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $\left[a = \pm\frac{1}{2}\right]$

$a \neq 0$

deve essere $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left[\ln(1-x) - 2a\right] = 0 - 2a = -2a = f(0)$$

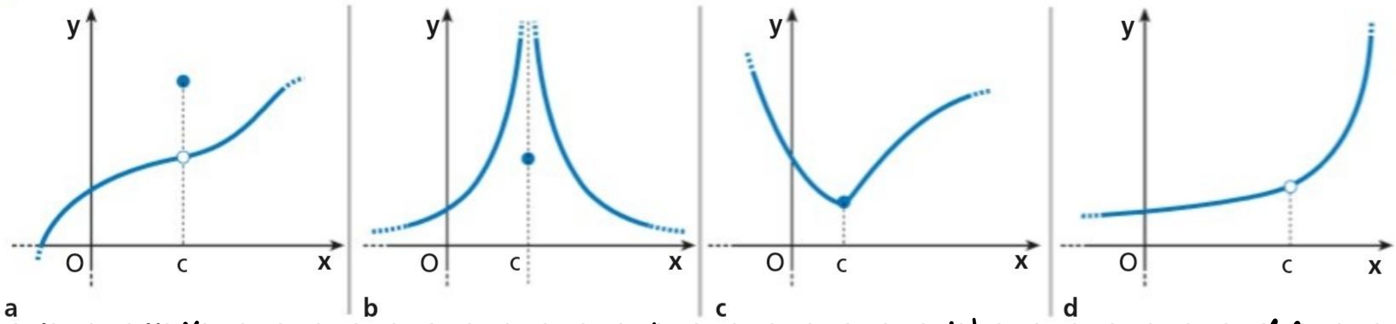
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - e^x}{2ax} = \lim_{x \to 0^+} \left[\underbrace{\frac{\cos x - 1}{2a x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{e^x - 1}{2a x}}_{\to 1}\right] = -\frac{1}{2a}$$

$$\Downarrow$$

$$-2a = -\frac{1}{2a}$$

$$a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$$

748 Quali delle funzioni rappresentate dai seguenti grafici non sono continue in c e perché?



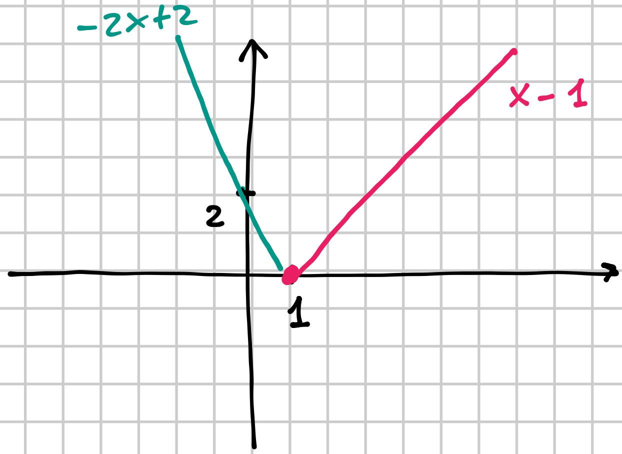
a: DISCONTINUA IN C (3° SPECIE - ELIMINABILE)

b: DISCONTINUA IN C (2° SPECIE - PUNTO DI INFINITO)

c: CONTINUA IN C

d: IN C LA FUNZIONE NON È DEFINITA, QUINDI NON CI PONIAMO IL PROBLEMA DELLA CONTINUITÀ O DISCONTINUITÀ

753 $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ -2x+2 & \text{se } x < 1 \end{cases}, \qquad x_0 = 1.$



$f(1) = 1 - 1 = 0$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x-1) = 0$

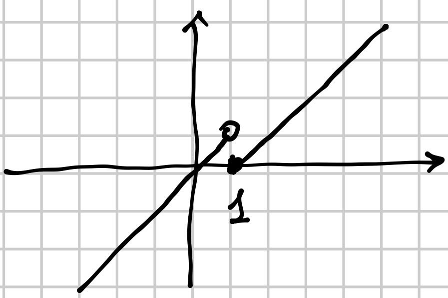
$=$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (-2x+2) = 0$

dato che $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$

la funzione è continua in 1

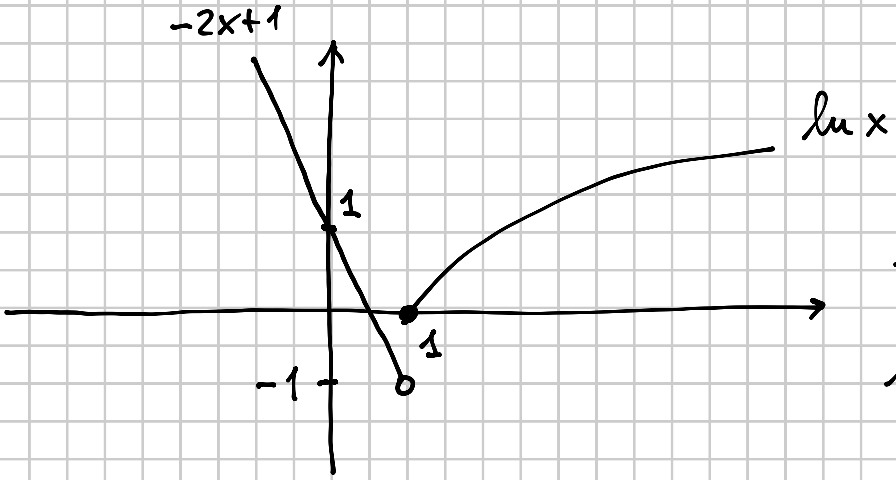
Se fosse $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ x & \text{se } x < 1 \end{cases}$



DISCONTINUA IN 1 (DISC. 1° SP.), È CONTINUA A DESTRA

758 $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{se } x < 1 \\ \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

~~[$f(x)$ discontinua in $x = 1$]~~



f è discontinua in 1

perché $\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 0$

ma $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$

$\neq$

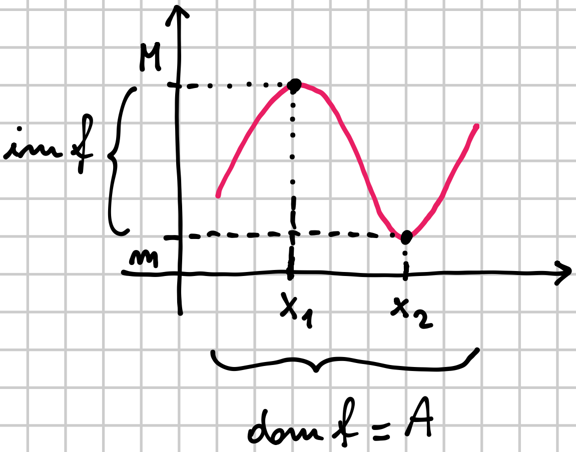
TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

5.4. Definizione. *Data una funzione reale f, si chiamano massimo e minimo di f, o valore massimo e valore minimo di f, il massimo e il minimo dell'insieme immagine di f. Essi, quando esistono, sono denotati rispettivamente con* $\max f$ *e* $\min f$, *cioè* $\max f = \max(\mathrm{im}\, f)$ *e* $\min f = \min(\mathrm{im}\, f)$.

Un punto $x_0 \in \mathrm{dom}\, f$ *si chiama punto di massimo o punto di minimo, oppure punto di massimo assoluto o punto di minimo assoluto, quando rispettivamente*

$$f(x_0) = \max f \qquad o \qquad f(x_0) = \min f. \ \square$$

$f : A \to \mathbb{R}$



x_1 = PUNTO DI MASSIMO

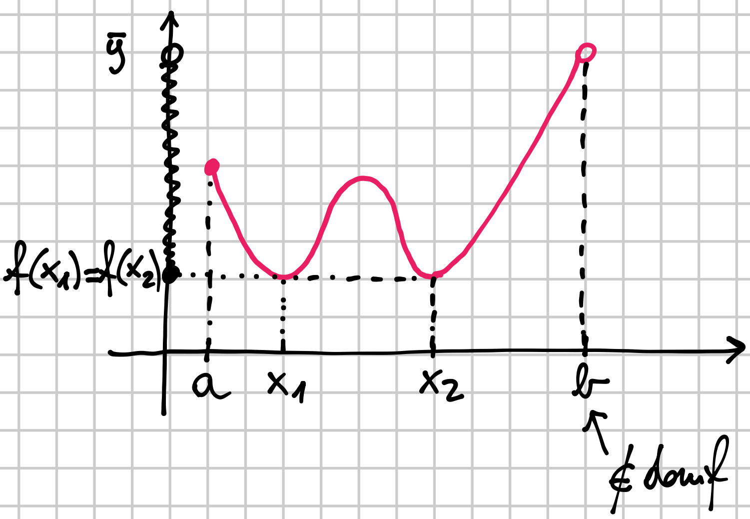
$f(x_1) = M$ = MASSIMO (ASSOLUTO) DI f

x_2 = PUNTO DI MINIMO

$f(x_2) = m$ = MINIMO (ASSOLUTO) DI f

ESEMPIO

$f : [a, b[\to \mathbb{R}$



x_1, x_2 = PUNTI DI MINIMO

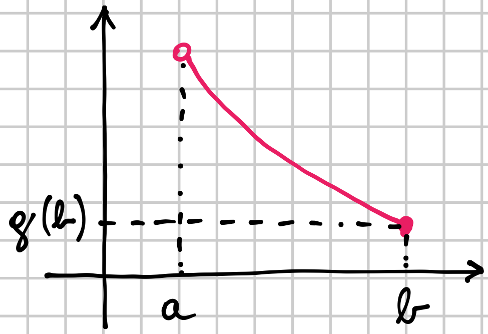
$f(x_1) = f(x_2)$ = MINIMO DI f

L'insieme immagine ha min, ma non ha max.

IL MASSIMO E IL PUNTO DI MASSIMO NON ESISTONO

$\mathrm{im}\, f = [f(x_1), \bar{y}[$

$\sup f = \bar{y}$ $\quad$ $\max f$ non esiste

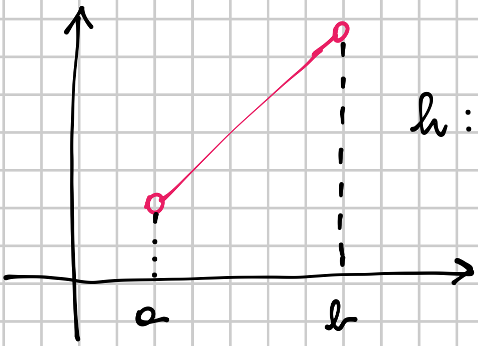


$g :]a, b] \to \mathbb{R}$

MASSIMO E PUNTO DI MASSIMO NON ESISTONO

b = punto di minimo

$g(b) = \min g$



$h :]a, b[\to \mathbb{R}$ NON HA NÉ MAX NÉ MIN

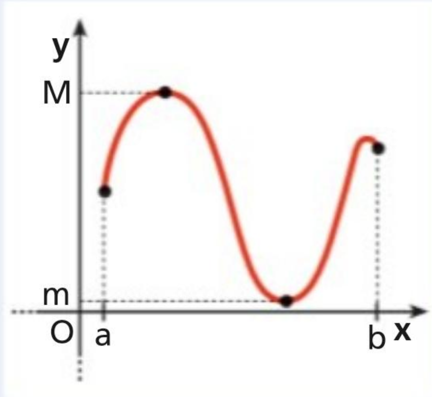
5.5. Osservazione. Facciamo notare che abbiamo accuratamente distinto ad esempio il *valore* massimo dal *punto* di massimo: il primo è un elemento di $\operatorname{im} f$, mentre il secondo appartiene a $\operatorname{dom} f$.

Se $x_0 \in \operatorname{dom} f$ è un punto di massimo, allora $f(x_0)$ è il valore massimo della funzione f. Vi è un altro punto a questi collegato: si tratta del punto del grafico di ascissa x_0, cioè del punto $(x_0, f(x_0))$. A questo terzo punto non si dà alcuna etichetta particolare: segnaliamo tuttavia che, *abusivamente*, talvolta anch'esso viene detto punto di massimo. Noi eviteremo ciò con cura.

TEOREMA

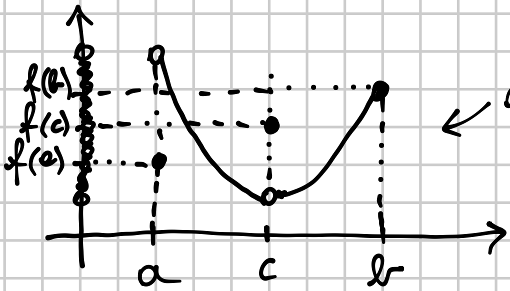
Teorema di Weierstrass

Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$, allora essa assume, in tale intervallo, il massimo assoluto e il minimo assoluto.

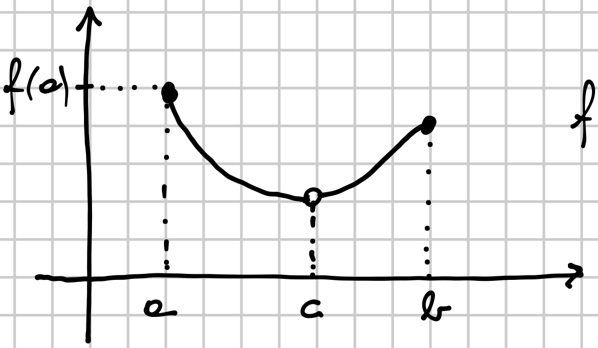


$f: [a, b] \to \mathbb{R}$

Se faccio cadere l'ipotesi di continuità la tesi potrebbe non essere vera:



questa funzione non ha né max né min (non è continua)



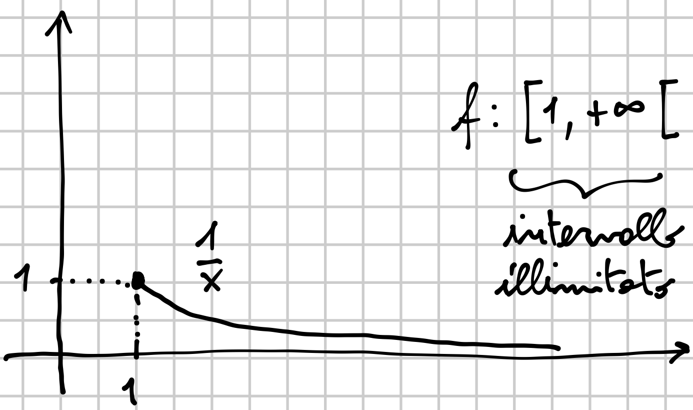
$f: \overbrace{[a, c[\cup]c, b]}^{\text{unione di 2 intervalli semiaperti}} \to \mathbb{R}$ è continua

ha massimo, ma non ha minimo

$\downarrow$

a = punto di max

$f(a) = \max f$



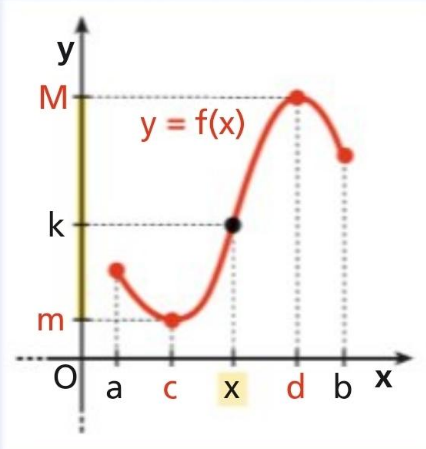
$f: \underbrace{[1, +\infty[}_{\text{intervallo illimitato}} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \operatorname{im} f =]0, 1]$

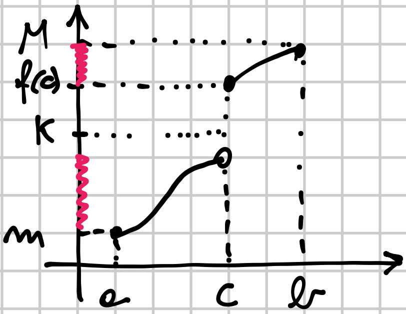
f ha max ma non ha min

TEOREMA

Teorema dei valori intermedi

Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$, allora essa assume, almeno una volta, tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.





f non è continua in $[a, b]$ e K non ha controimmagini (nessun elemento x_0 del dominio è tale che $f(x_0) = K$)

EQUIVALENTEMENTE: TESI $f([a, b])$ è un intervallo

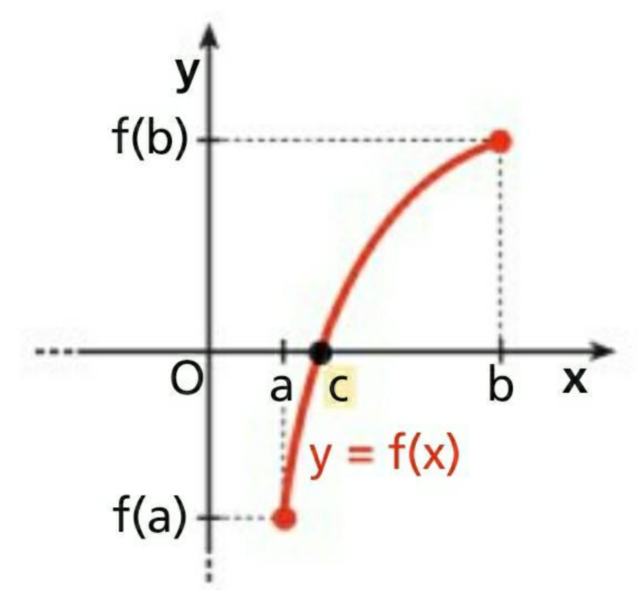
TEOREMA

Teorema di esistenza degli zeri

Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ e negli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto $c \in]a; b[$ in cui f si annulla, ossia $f(c) = 0$.

c è INTERNO AD $[a, b]$

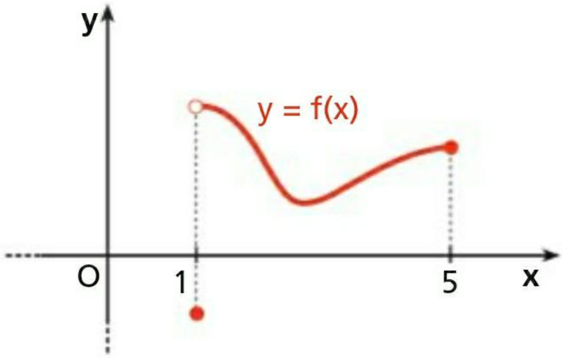
$f(a) \cdot f(b) < 0$



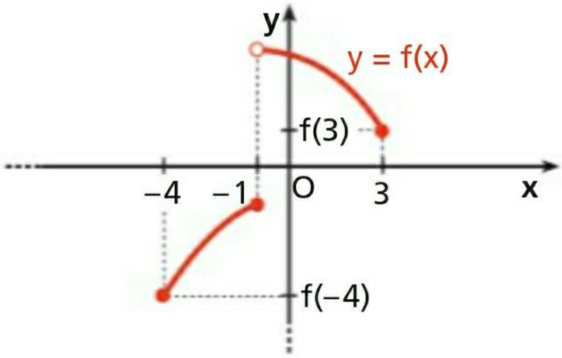
Il teorema afferma che, nelle ipotesi indicate, l'equazione

$$f(x) = 0$$

ha almeno una soluzione in $]a, b[$



a. La funzione è continua nell'intervallo]1; 5], $f(1) < 0$ e $f(5) > 0$, ma non esiste alcun punto dell'intervallo in cui essa si annulla.



b. La funzione non è continua in $x = -1$; $f(-4) < 0$ e $f(3) > 0$. Non esiste alcun punto dell'intervallo [−4; 3] in cui essa si annulla.