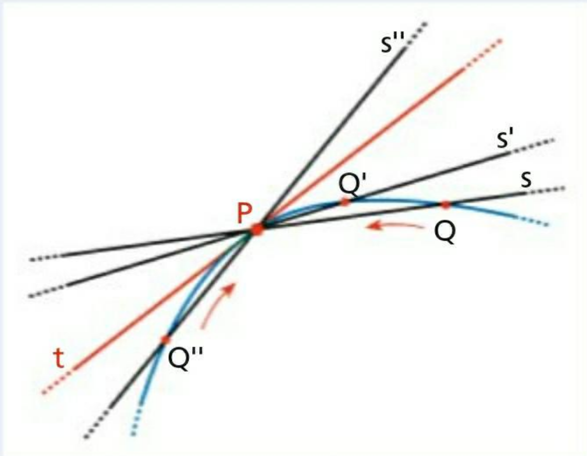
26/11/2020

DEFINIZIONE

La **retta tangente a una curva** in un punto P è la retta limite, se esiste, a cui tendono le secanti PQ al tendere di Q a P (sia da destra sia da sinistra).

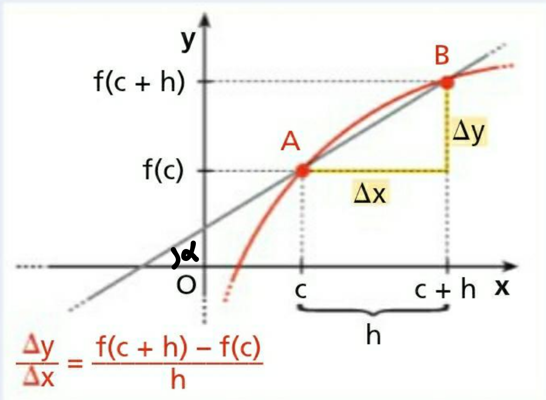


RAPPORTO INCREMENTALE

DEFINIZIONE

Dati una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, e due numeri reali c e $c + h$ (con $h \neq 0$) interni all'intervallo, il **rapporto incrementale** di f nel punto c (o relativo a c) è il numero:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$



$\underbrace{\Delta x = h}_{\neq 0}$

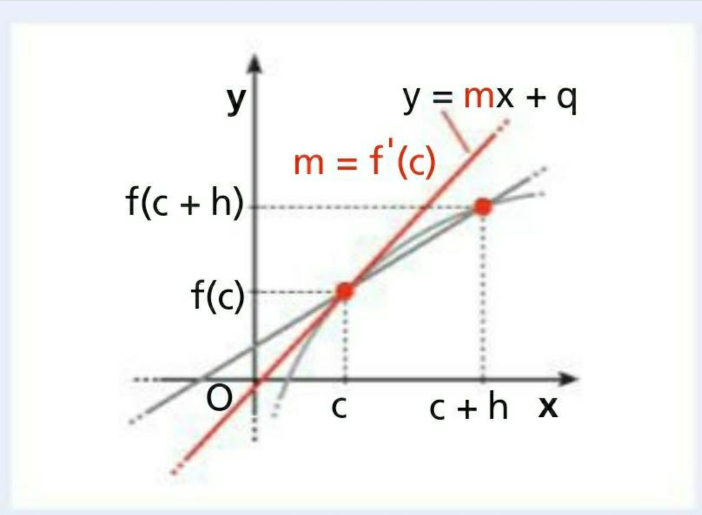
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

$\downarrow$ coeff. angolare della retta secante AB (è anche uguale a $\tan \alpha$)

RAPPORTO INCREMENTALE (RELATIVO A C E ALL'INCREMENTO Δx)

DERIVATA DI f NEL PUNTO c

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo, $c \in I$



Per trovare il coefficiente angolare della retta tangente si fa il limite per $\Delta x \to 0$ del rapporto incrementale.
Questo limite, quando esiste finito o $+\infty$ o $-\infty$, si chiama <u>DERIVATA</u> di f in c e si indica con $f'(c)$

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ (I intervallo $c \in I$) si dice <u>DERIVABILE in c</u> se $f'(c)$ esiste <u>FINITA</u>

Se g è tale che $g'(c) = +\infty$, g <u>NON</u> è derivabile in c, anche se la derivata esiste e vale $+\infty$!

40 $f(x) = \dfrac{x-1}{2-x}$, $\quad c = 1.$ Calcolare la derivata nel punto

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$f(1+\Delta x) = \frac{\cancel{1} + \Delta x - \cancel{1}}{2-(1+\Delta x)} = \frac{\Delta x}{1-\Delta x} \qquad f(1) = \frac{1-1}{2-1} = 0$$

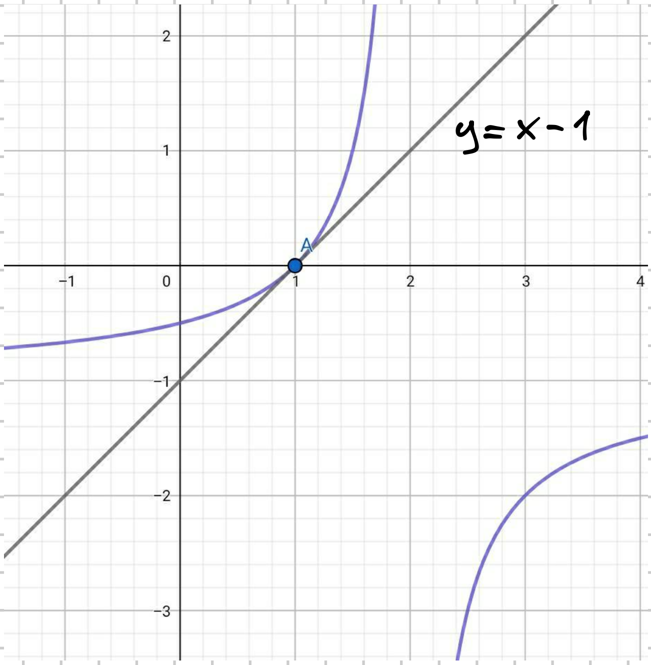
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{1-\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{1-\Delta x} \cdot \frac{1}{\cancel{\Delta x}} = 1 = f'(1)$$

Nel punto $(1, f(1))$ la tangente ha coeff. angolare $f'(1) = 1$

Per trovare l'eq. della tangente $(c, f(c))$

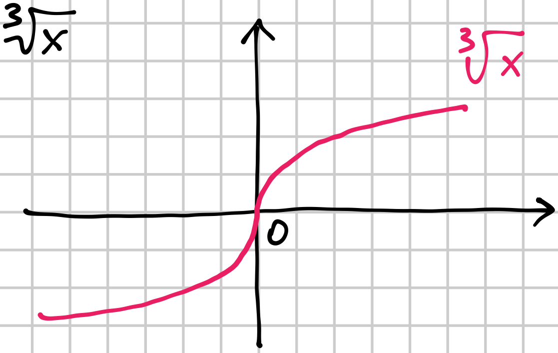
$A(1,0)$ RETTA TANGENTE $\boxed{y - f(c) = f'(c)(x-c)}$

$y = \dfrac{x-1}{2-x}$ $\qquad y - 0 = 1 \cdot (x-1)$



$y = x - 1$

ESEMPIO $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\sqrt[3]{x}$



Calcoliamo la derivata di f in 0

$f(0)=0$

$f(0+h)=\sqrt[3]{0+h}=\sqrt[3]{h}$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}\cdot\frac{\sqrt[3]{h^2}}{\sqrt[3]{h^2}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\sqrt[3]{h^2}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

In 0 la derivata esiste e vale $+\infty$. La tangente è verticale e attraversa la curva. 0 è un punto di <u>NON DERIVABILITÀ</u> che si chiama <u>FLESSO A TANGENTE VERTICALE</u>

in generale si ha quando $f'(c)=+\infty$ o $f'(c)=-\infty$

NOTAZIONE PER LA DERIVATA

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$$