30/11/2020

46 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, $\qquad c = 5.$

Calcolare la derivata in c

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$$

$$f(5) = \frac{1}{\sqrt{5-1}} = \frac{1}{2}$$

$$f(5+h) = \frac{1}{\sqrt{5+h-1}} = \frac{1}{\sqrt{4+h}}$$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{4+h}} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2-\sqrt{4+h}}{2\sqrt{4+h}}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2-\sqrt{4+h}}{2h\sqrt{4+h}} \cdot \frac{2+\sqrt{4+h}}{2+\sqrt{4+h}} = \lim_{h \to 0} \frac{4-(4+h)}{2h\sqrt{4+h}\,(2+\sqrt{4+h})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{h}}{2\cancel{h}\underbrace{\sqrt{4+h}}_{\downarrow \, 2}\,(2+\underbrace{\sqrt{4+h}}_{\downarrow \, 2})} = \frac{-1}{2 \cdot 2 \cdot (2+2)} = -\frac{1}{16}$$

52 **TEST** Il limite $\lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{(3+h)^2}^{f(c+h)} - \overbrace{9}^{f(c)}}{h}$ è per definizione la derivata di:

A $f(x) = x^2 - 9$ in $c = 3$.

~~B~~ $f(x) = (x+3)^2$ in $c = 0$.

C $f(x) = \frac{(3+x)^2 - 9}{x}$ in $c = 0$.

~~D~~ $f(x) = (x+1)^2$ in $c = 2$.

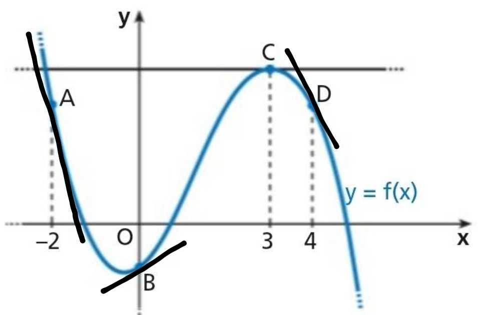
53 **COMPLETA** con il simbolo $>$, $<$, $=$, ragionando sul significato geometrico di derivata:

a. $f'(-2)$ $<$ 0;

b. $f'(0)$ $>$ 0;

c. $f'(3)$ $=$ 0;

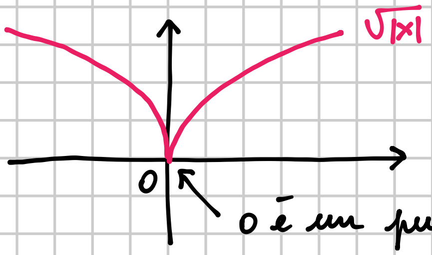
d. $f'(4)$ $<$ 0.



$\boxed{52}$ $f(x) = (x+1)^2$ $\qquad f(2) = (2+1)^2 = 9$

$$f(2+h) = (2+h+1)^2 = (3+h)^2$$

"Calcolare" la derivata in 0 di $f(x) = \sqrt{|x|}$



0 è un punto di non derivabilità che si chiama CUSPIDE perché $f'_+(0) = +\infty$ e $f'_-(0) = -\infty$

DERIVATA DESTRA $\qquad$ DERIVATA SINISTRA

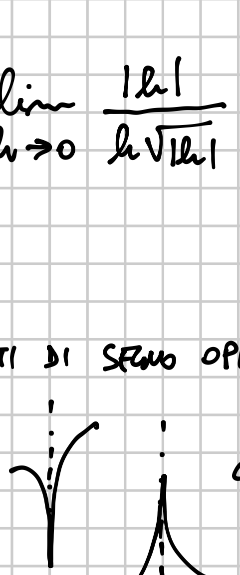
INFINITI DI SEGNO OPPOSTO

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{|h|}}{h} \cdot \frac{\sqrt{|h|}}{\sqrt{|h|}} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h\sqrt{|h|}} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\sqrt{|h|}} = \frac{1}{0^+} = +\infty = f'_+(0)$$

$\neq$ INFINITI DI SEGNO OPPOSTO

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\sqrt{|h|}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty = f'_-(0)$$



Il limite del rapporto incrementale non esiste, ma esistono derivata destra e sinistra (infiniti di segno opposto)

TEOREMA

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo $x_0 \in I$ f è derivabile in x_0
(esiste $f'(x_0)$ finita)

$\Rightarrow$ f è CONTINUA in x_0

DIMOSTRAZIONE

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \underbrace{\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0) \text{ FINITA}} \cdot \underbrace{h}_{\to 0}}_{\to 0 \text{ per } h \to 0}$$

Calcolo il limite per $h \to 0$ di entrambi i membri

quindi

$$\lim_{h \to 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$ cioè f è CONTINUA in x_0

CVD

---

f è continua in x_0 $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

$$\left(x = x_0 + h \qquad x \to x_0 \Leftrightarrow h \to 0 \right)$$

FUNZIONE DERIVATA

2.1. Definizione. *Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione e x_0 un punto di I. Se la derivata $f'(x_0)$ esiste ed è finita, la funzione f è detta derivabile in x_0.* □

2.2. Definizione. *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile in almeno un punto di I. Si chiama derivata di f la funzione, denotata f', che a ogni punto $x \in I$ in cui f è derivabile associa la derivata di f in x. Dunque*

$$\operatorname{dom} f' = \{x \in \operatorname{dom} f : \ f'(x) \text{ esiste finita}\} \quad \text{e} \quad f' : x \mapsto f'(x). \ \square$$

ESEMPI

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x$

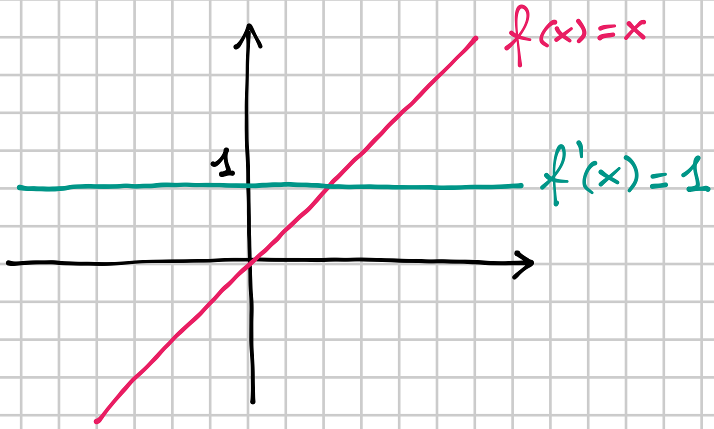
Considero un generico x e calcolo la derivata in x

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} 1 = 1 \implies \text{la derivata di } f \text{ in ogni punto } x \text{ è } 1$$

FUNZIONE DERIVATA

$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f'(x) = 1$



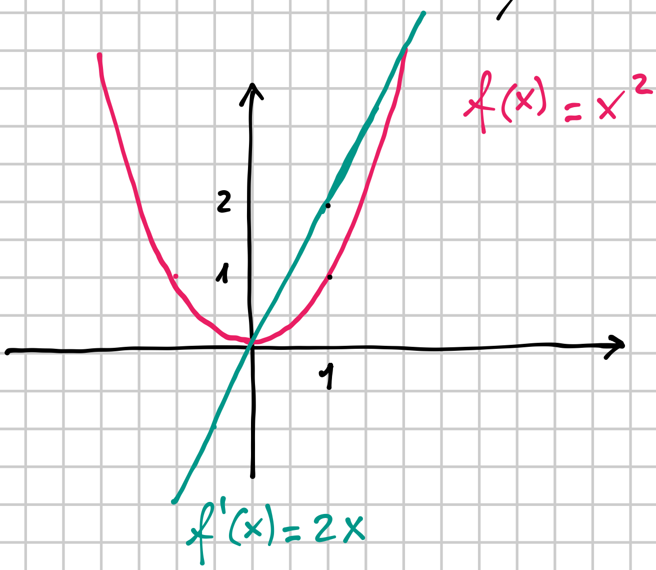
2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x$$

FUNZIONE DERIVATA

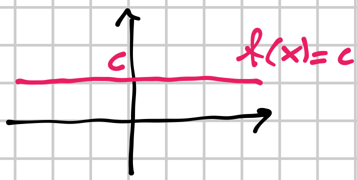
$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f'(x) = 2x$



DALLE PROPRIETÀ DEI LIMITI SEGUE CHE

- $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
- $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \qquad c \in \mathbb{R}$ costante

3) La derivata di una funzione costante è 0



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = c \qquad (c \in \mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 0$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

DERIVATA DI x^n $\quad n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$

$$f(x) = x^n \qquad f'(x) = n\,x^{n-1}$$

DIMOSTRAZIONE

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = (*)$$

$$(x+h)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n$$

BINOMIO DI NEWTON

$$(*) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^n} + n x^{n-1} h + \dots \dots - \cancel{x^n}}{h} =$$

TERMINI MOLTIPLICATI PER POTENZE DI h CON ESPONENTE ≥ 2

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\,(n x^{n-1} + \dots\dots)}{\cancel{h}} =$$

TERMINI MOLTIPLICATI PER POTENZE DI h CON ESP. ≥ 1

$\downarrow$ per $h \to 0$

0

$$= n\,x^{n-1}$$

Calcolare la derivata di $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 7x - 2$

$$f'(x) = 2 \cdot 4x^3 - 3 \cdot 3x^2 + 7 \cdot 1 + 0 =$$

$$= 8x^3 - 9x^2 + 7$$

82 $f(x) = |2x| - 1, \qquad c = 0.$

Calcolare $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{|2\cdot(0+h)|-1-\left(|2\cdot 0|-1\right)}{h}=$$

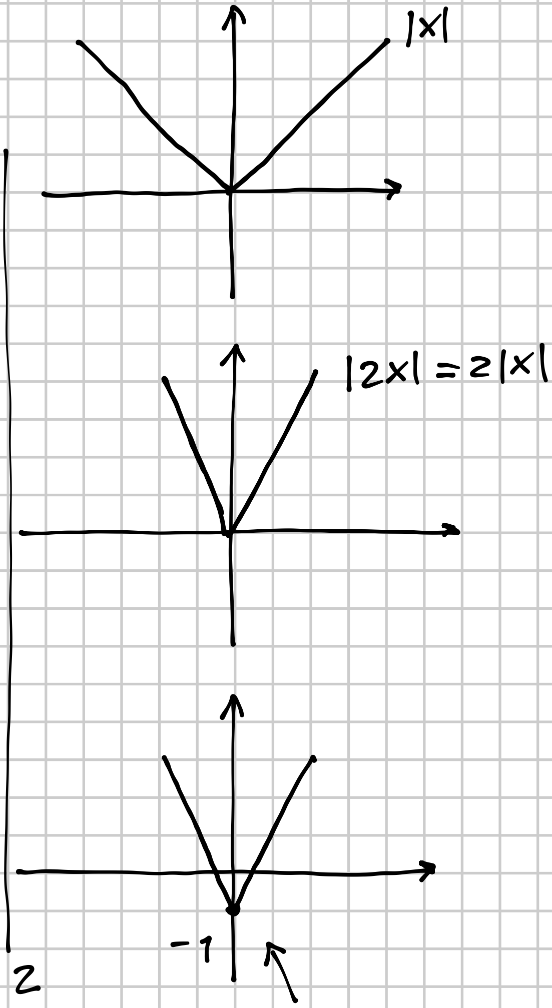
$|h|=h$ perché $h\to 0^+$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{2|h|-\cancel{1}+\cancel{1}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}}=2$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{2|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}}=-2$$

$|h|=-h$ perché $h\to 0^-$



PUNTO ANGOLOSO

($f'_+(x_0)\neq f'_-(x_0)$ e almeno una delle 2 è finita)