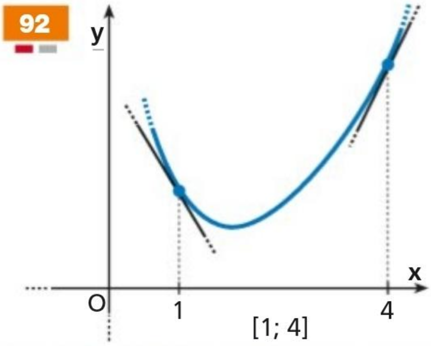
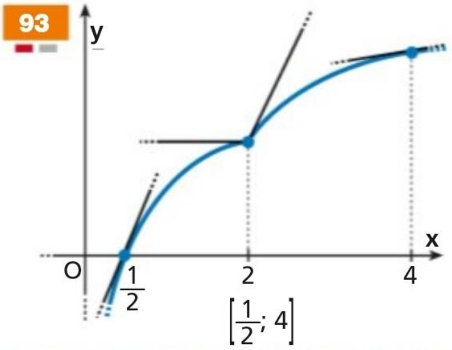
3/12/2020

LEGGI IL GRAFICO **Esaminando i grafici e utilizzando il significato geometrico di derivata, deduci se le seguenti funzioni sono derivabili negli intervalli indicati.**

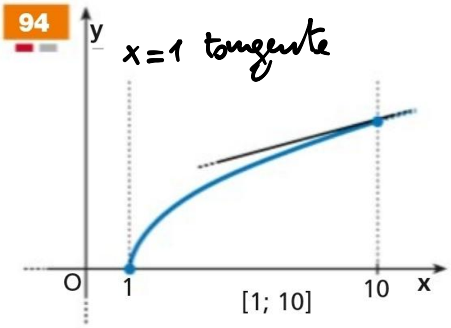
92



93



94



È derivabile in tutti i punti di [1,4], è derivabile in [1,4] (non ci sono punti in cui la derivata non esiste o è infinita

NON è derivabile in $[\frac{1}{2}, 4]$, poiché non lo è in 2, dove c'è un punto angoloso

$$f'_+(2) \neq f'_-(2)$$

e almeno una delle due è finita

NON è derivabile in [1,10], poiché non lo è in 1

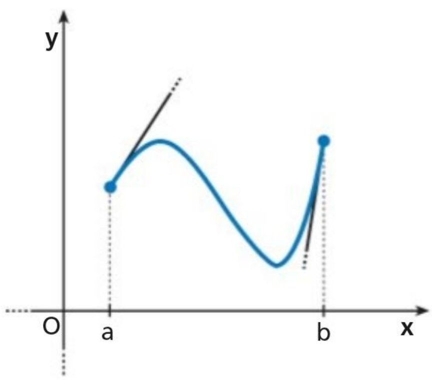
$f'_+(1) = +\infty$

↑

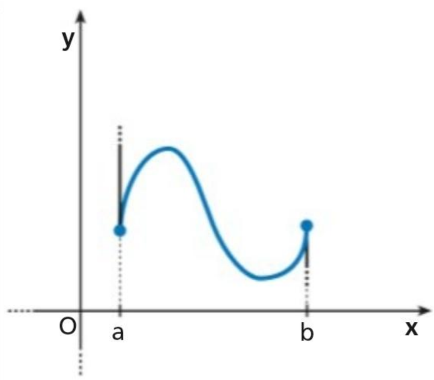
derivata destra = derivata

Però è derivabile in]1,10]

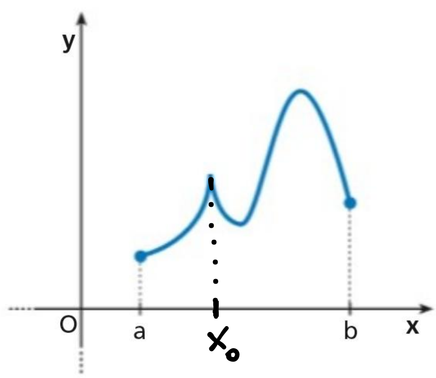
95 **LEGGI IL GRAFICO** Indica se i seguenti grafici rappresentano funzioni: **a.** continue in [*a*; *b*]; **b.** derivabili in [*a*; *b*]. In caso negativo, giustifica le tue risposte.



a



b



c

CONTINUA E DERIVABILE IN [a, b]

CONTINUA MA NON DERIVABILE IN [a, b]

$f'_+(a) = +\infty$

$f'_-(b) = +\infty$

CONTINUA MA NON DERIVABILE IN [a, b]

IN x_0 $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$

RIEPILOGO

- $[f(x)+g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

- $[c\, f(x)]' = c \cdot f'(x)$

  costante reale

DERIVATE DI FUNZIONI ELEMENTARI

$f(x) = c$ (costante) $\qquad f'(x) = 0$

$f(x) = x^n \qquad n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \qquad f'(x) = n x^{n-1}$

- $f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \underbrace{\frac{(e^h - 1)}{h}}_{1} = e^x$$

- $f(x) = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \, (\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cdot \sin h}{h} = -\sin x$$

0 1

- $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sin x \, (\cos h - 1)}{h} + \cos x \, \frac{\sin h}{h} \right] = \cos x$$

1 0

ESEMPIO

$$f(x) = 5x^7 - 3x^2 - 2\cos x + 10 e^x$$

$$f'(x) = 35x^6 - 6x + 2\sin x + 10 e^x$$

$$f'(0) = 35 \cdot 0^6 - 6 \cdot 0 + 2 \cdot \sin 0 + 10 e^0 = 10$$

Calcoliamo la derivata di $f(x) = x^{\alpha}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (x > 0)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{\alpha} - x^{\alpha}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^{\alpha}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\alpha} - x^{\alpha}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} x^{\alpha} \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{h}{x} \cdot x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

α

Si dimostra che funziona anche per le radici

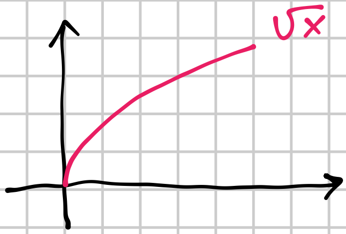
$f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad f'(x) = ?$

$\Downarrow$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(x > 0)$

$\sqrt{x}$ in 0 non è derivabile



$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$y = f(g(x))$ $\qquad$ f, g DERIVABILI (IPOTESI BUONE)

$$[f(g(x))]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = (*)$$

$$t = g(x)$$

$$\Delta t = g(x+\Delta x) - g(x) = g(x+\Delta x) - t$$

$$\Rightarrow \quad g(x+\Delta x) = t + \Delta t$$

$$(*) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} =$$

$$\Delta x \to 0 \;\Downarrow\; \Delta t \to 0$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} =$$

$$= f'(t) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ESEMPIO

$y = \cos(3x+2)$ $\qquad$ $f(x) = \cos x$ $\qquad$ $g(x) = 3x+2$

$= f(g(x))$ $\qquad$ $f'(x) = -\sin x$ $\qquad$ $g'(x) = 3$

$$y' = -\sin(3x+2) \cdot 3 = \boxed{-3\sin(3x+2)}$$