12/12/2020

DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$$\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ES. 1)

$y = \cos x^2 \qquad y' = -\sin x^2 \cdot 2x = -2x \sin x^2$

$\Downarrow$

$t = x^2 = g(x) \qquad f(g(x)) = f(t) = \cos t = \cos x^2$

$y = f(t) = \cos t$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}}$$

ES. 2)

$y = \sin^2 x = (\sin x)^2 \qquad t = \sin x \qquad \frac{dt}{dx} = \cos x$

$y = t^2 \qquad \frac{dy}{dt} = 2t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2t \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

ES. 3)

$y = \ln\left(e^{2 \cdot \sin x}\right)$

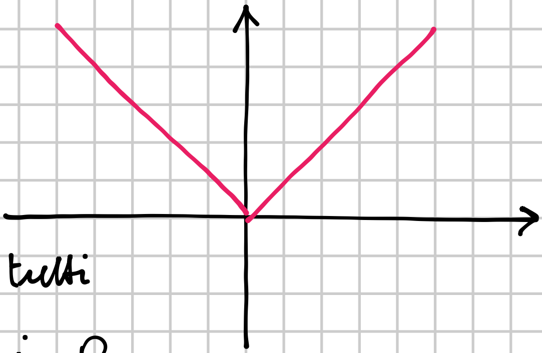
$y = \ln t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$

$t = e^{2\sin x} = e^z \Rightarrow \frac{dt}{dz} = e^z$

$z = 2 \sin x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2\cos x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{t} \cdot e^z \cdot 2\cos x = \frac{1}{\cancel{e^z}} \cdot \cancel{e^z} \cdot 2\cos x = 2\cos x$$

LA FUNZIONE $|x|$

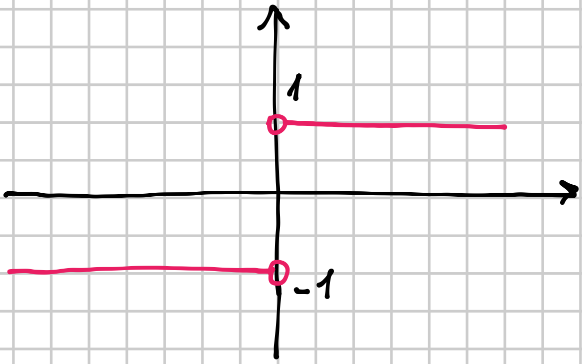


$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

è derivabile in tutti i punti tranne in 0, dove ha un punto angoloso

$$|\cdot|' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$



$$\text{sign}(x) = |x|' = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

sign(x) è la derivata di $|x|$

↓

NON è definito in 0

$$x = |x| \cdot \text{sign}(x) \quad \forall x \neq 0$$

315 $y = \ln(e^{2x} - 1)$

Calcolare la derivata

$$y' = \frac{1}{e^{2x}-1} \cdot (e^{2x}-1)' = \frac{1}{e^{2x}-1}\, e^{2x} \cdot (2x)' = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}$$

$y = \ln t$ $\qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$

$t = e^{2x} - 1 = e^{z} - 1$ $\qquad \frac{dt}{dz} = e^{z}$

$z = 2x$ $\qquad \frac{dz}{dx} = 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{t} \cdot e^{z} \cdot 2 = \frac{1}{e^{2x}-1} \cdot e^{2x} \cdot 2 = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}$$

318 $y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$f(x) = \sqrt{x} \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)' = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' =$$

SERVE LA DERIVATA DEL QUOZIENTE DI 2 FUNZIONI

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\cancel{1-x}}{1+x} \cdot \frac{1\cdot(1-x) - (1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2(1+x)} \cdot \frac{1 \cancel{-x} + 1 \cancel{+x}}{1-x} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(1-x^2)} = \frac{1}{1-x^2}$$

DERIVATA DEL QUOZIENTE

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

DERIVATA DEL PRODOTTO

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

pag. 1581

LEGGI IL GRAFICO

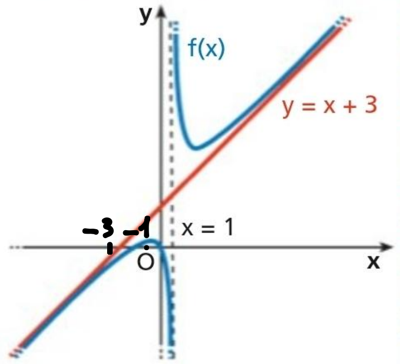
91 Il grafico a fianco rappresenta la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + ax}{bx + c}$ e i suoi asintoti.

a. Determina il valore di a, b e c.

b. Determina il dominio di f e classifica gli eventuali punti di ~~singolarità~~ DISCONTINUITÀ.

c. Stabilisci se è possibile applicare il teorema degli zeri in $[-3; -1]$ e $[-1; 1]$, quindi risolvi l'equazione $f(x) = 0$.

[a) $a = 2, b = 1, c = -1$; b) $D: x \neq 1$, $x = 1$: II specie; c) $x = -2, x = 0$]



a) $f(x) = \dfrac{x^2 + ax}{bx + c}$ $\qquad$ $x = 1$ è ASINTOTO VERTICALE (DAL GRAFICO)

$\downarrow$

$bx + c = 0$ $\qquad$ $x = -\dfrac{c}{b}$ è l'asintoto verticale che derivo algebricamente

$\Downarrow$

$-\dfrac{c}{b} = 1$ $\qquad$ $b = -c$

$y = x + 3$ è asintoto obliquo

$m = 1$

$$1 = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + ax}{bx^2 + cx} = \frac{1}{b} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + ax}{x - 1}$$

$$q = 3 = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 + ax}{x - 1} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2} + ax - \cancel{x^2} + x}{x - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(a+1)}{x - 1} = a + 1$$

$\Rightarrow a + 1 = 3$ $\qquad$ $a = 2$ $\qquad$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 1}$ $\qquad D = \mathbb{R} - \{1\}$

$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ $\qquad$ f è continua in D

Tuttavia, se fosse definita in 1, avrebbe in 1 un punto di discontinuità di II specie, perché

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

c) in $[-3, -1]$ f è definita e continua, $f(-3) < 0$

$f(-1) > 0$

quindi è possibile applicare il teorema degli zeri.

In $[-1, 1]$ non è invece possibile applicarlo perché f non è definita in $[-1, 1]$, poiché non lo è in 1 (se anche fosse definita in 1, sarebbe comunque non continua in $[-1, 1]$)

Posso invece applicarlo in $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$, ad esempio.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x}{x - 1} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \quad x(x + 2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -2$$

94 Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{se } x < 0 \\ 2e^{\frac{ax+b}{x-c}} & \text{se } x \geq 0, x \neq c \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^+$.

a. Trova i valori di a, b e c in modo tale che: $f(x)$ sia continua in $x = 0$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2e$; $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 0$.

b. Con i valori a, b e c trovati al punto precedente, calcola: $\lim_{x \to 3^+} f(x)$; $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

c. Stabilisci se esistono i seguenti limiti e, nel caso, calcolali: $\lim_{x \to -\infty} xf(x)$; $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x}$.

[a) $a = 1, b = 0, c = 3$; b) $+\infty, 0$; c) non esiste, $-\infty$]

a) Affinché sia continua in 0, deve essere $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2e^{\frac{ax+b}{x-c}} = 2e^{-\frac{b}{c}}$$

$\overset{\shortparallel}{f(0)}$

$\Downarrow$

$e^{-\frac{b}{c}} = 1 \Rightarrow -\frac{b}{c} = 0$

$\Rightarrow b = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2e^{\frac{ax+b}{x-c}} = 2e^{a} \underset{\text{IMPONGO}}{=} 2e \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 2e^{\frac{x}{x-c}} = 2^{\frac{3}{3^- - c}} \underset{\text{IMPONGO}}{=} 0$$

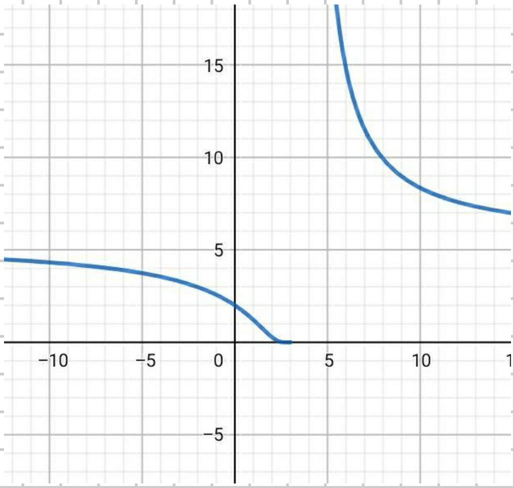
$\Downarrow$

$\frac{3}{3^- - c} = -\infty \Rightarrow 3^- - c = 0$

$\Downarrow$

$c = 3$

b) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} 2e^{\frac{x}{x-3}} = 2e^{\frac{3}{0^+}} = 2e^{+\infty} = +\infty$



$y = 2e^{\frac{x}{x-3}}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sin 2x}{x} = 0$ per il teorema dei carabinieri

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1$$

$$(x<0) \quad \underset{\downarrow\, 0}{-\frac{1}{x}} \geq \underset{\downarrow\, 0}{\frac{\sin 2x}{x}} \geq \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{x}} \quad \text{per } x\to -\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} x f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \sin 2x$ NON ESISTE

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\sin 2x}{x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-}\left[\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{2}{x}}_{-\infty}\right] = -\infty$$