15/12/2020

DERIVATA DEL QUOZIENTE DI DUE FUNZIONI

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$$

DIMOSTRAZIONE

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{g(x+h)\,g(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x) + f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{h\,g(x+h)\,g(x)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) - f(x) \cdot \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)\,g(x)} =$$

$$= \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$$

225 $y = \dfrac{x^2+5}{x^2-1}$

$$y' = \frac{(x^2+5)'(x^2-1) - (x^2+5)\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2-1) - (x^2+5)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 2x - \cancel{2x^3} - 10x}{(x^2-1)^2} =$$

$$= -\frac{12x}{(x^2-1)^2}$$

LA DERIVATA DELLA TANGENTE

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Downarrow$$

$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

3.1. Teorema di linearità. *Siano I un intervallo, x_0 un punto interno a I, $f, g : I \to \mathbf{R}$ due funzioni derivabili in x_0 e c un numero reale. Allora sono derivabili in x_0 anche le funzioni $f+g$ e cf e valgono le formule:*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \tag{3.1}$$

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0). \ \square \tag{3.2}$$

3.2. Teorema. *Siano I un intervallo, x_0 un punto interno a I e $f, g : I \to \mathbf{R}$ due funzioni derivabili in x_0. Allora è derivabile in x_0 anche la funzione fg. Se inoltre $g(x_0) \neq 0$ anche f/g è derivabile in x_0.*

Valgono infine le formule, la prima delle quali è detta di Leibniz:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \tag{3.3}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad \text{se} \quad g(x_0) \neq 0. \ \square \tag{3.4}$$

3.3. Teorema. *Siano I e J due intervalli, x_0 un punto interno a I, $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione differenziabile in x_0 tale che $f(x_0)$ sia interno a J e $g : J \to \mathbf{R}$ una funzione differenziabile in $f(x_0)$. Allora la funzione composta $g \circ f$ è ben definita in un intorno di x_0 e differenziabile in x_0 e per la sua derivata in x_0 vale la formula*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \ \square \tag{3.5}$$

DIFFERENZIABILE = DERIVABILE

ES. CALCOLO DERIVATE

207 $y = 2\sqrt{2}\,x^2 \ln x - \sqrt{2}\,x^2$

$$y' = 2\sqrt{2}\left(2x \cdot \ln x + x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right) - 2\sqrt{2}\,x =$$

$$= 4\sqrt{2}\,x \ln x + \cancel{2\sqrt{2}\,x} - \cancel{2\sqrt{2}\,x} = 4\sqrt{2}\,x \ln x$$

216 $y = 2x \cdot \ln x \cdot \sin x$

$$y' = \underbrace{2}_{(2x)'} \ln x \cdot \sin x + 2\cancel{x} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cancel{x}}}_{(\ln x)'} \cdot \sin x + 2x \ln x \cdot \underbrace{\cos x}_{(\sin x)'} =$$

$$= 2 \ln x \cdot \sin x + 2 \sin x + 2x \ln x \cdot \cos x =$$

$$= 2\left(\ln x \cdot \sin x + \sin x + x \ln x \cdot \cos x\right)$$

218 $y = x \sin x \cos x$

$$y' = 1 \cdot \sin x \cos x + x \cdot \cos x \cdot \cos x + x \sin x\,(-\sin x) =$$

$$= \sin x \cos x + x \cos^2 x - x \sin^2 x =$$

$$= \sin x \cos x + x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) =$$

$$= \sin x \cos x + x \cos 2x$$

OSSERVAZIONE

$$y = x \sin x \cos x = \frac{x}{2} \sin 2x$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\sin 2x + x \cdot \cos 2x \cdot 2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + x \cos 2x = \sin x \cos x + x \cos 2x$$

249 $y = \dfrac{x^2 - 4x}{x \ln x}$ $\left[y' = \dfrac{x \ln x - x + 4}{x \ln^2 x}\right]$

$$y' = \frac{(2x-4)x \ln x - (x \ln x)'(x^2 - 4x)}{(x \ln x)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 \ln x - 4x \ln x - \left(\ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right)(x^2 - 4x)}{x^2 \ln^2 x} =$$

$$= \frac{2x^2 \ln x - \cancel{4x \ln x} - x^2 \ln x + \cancel{4x \ln x} - x^2 + 4x}{x^2 \ln^2 x} =$$

$$= \frac{x^2 \ln x - x^2 + 4x}{x^2 \ln^2 x} = \frac{\cancel{x}(x \ln x - x + 4)}{x^{\cancel{2}} \ln^2 x} =$$

$$= \frac{x \ln x - x + 4}{x \ln^2 x}$$

266 $y = \dfrac{2(\tan x - 1)}{\cos x - \sin x}$

$$y' = 2 \cdot \frac{(\tan x - 1)'(\cos x - \sin x) - (\tan x - 1)\cdot(\cos x - \sin x)'}{(\cos x - \sin x)^2} =$$

$$= 2\,\frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(\cos x - \sin x) - \frac{\sin x - \cos x}{\cos x}(-\sin x - \cos x)}{(\cos x - \sin x)^2} =$$

$$= 2\,\frac{\frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)^2} =$$

$$= 2\,\frac{\frac{\cos x - \sin x + \sin^2 x \cos x - \cos^3 x}{\cos^2 x}}{(\cos x - \sin x)^2} =$$

$$= 2\,\frac{\cos x\overbrace{(1 - \cos^2 x)}^{\sin^2 x} - \sin x + \sin^2 x \cos x}{\cos^2 x\,(\cos x - \sin x)^2} =$$

$$= 2\,\frac{2\cos x \sin^2 x - \sin x}{\cos^2 x\,(\cos x - \sin x)^2} =$$

$$= 2\sin x\,\frac{2\cos x \sin x - 1}{\cos^2 x\,(\cos x - \sin x)^2} = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}\cdot\frac{2\cos x \sin x - 1}{\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1} - 2\sin x \cos x} =$$

-1

$$= -\frac{2\sin x}{\cos^2 x}$$

DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

$f : I \to J$ BIETTIVA   FUNZ. INVERSA $f^{-1} : J \to I$ tale che $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in I$

CONGETTURA

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

DERIVIAMO AMBO I MEMBRI

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$

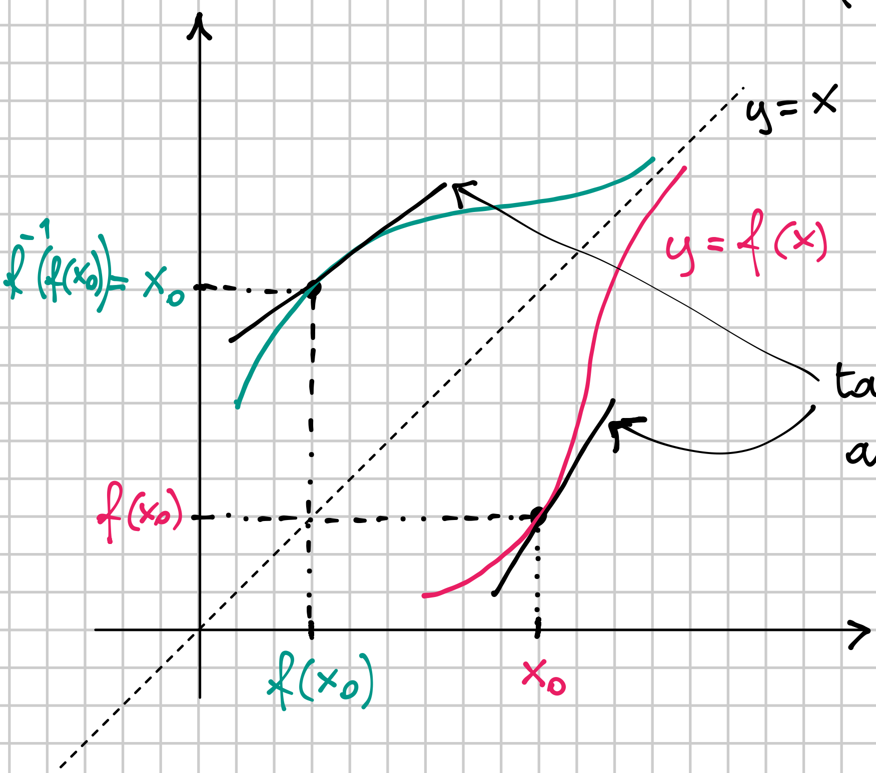
per definizione di funzione inversa

TEOREMA

$f : I \to \mathbb{R}$ INVERTIBILE E DERIVABILE $\Longrightarrow f^{-1}$ È DERIVABILE DOVE $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$

E VALE

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$



tangenti hanno coefficienti angolari reciproci

$\Downarrow$

se la tangente di f in x_0 ha coeff. angolare $f'(x_0)$, l'inversa nel punto $f(x_0)$ ha coeff. angolare $\frac{1}{f'(x_0)}$

Se chiamo $f(x_0) = t$, questo coeff. angolare è

$$\frac{1}{f'(f^{-1}(t))} = (f^{-1})'(t)$$