17/12/2020

267 $y = \dfrac{1+\sin x}{\tan x}$

calcolare la derivata

$$y' = \frac{\cos x \cdot \tan x - \frac{1}{\cos^2 x}(1+\sin x)}{\tan^2 x} =$$

$$= \frac{\cancel{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} - \frac{1}{1-\sin^2 x}(1+\sin x)}{\tan^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x - \frac{1}{(1-\sin x)\cancel{(1+\sin x)}}\cancel{(1+\sin x)}}{\tan^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x}{\tan^2 x} - \frac{1}{(1-\sin x)\tan^2 x} = \frac{\cancel{\sin x}}{\frac{\cancel{\sin^2} x}{\cos^2 x}} - \frac{\cos^2 x}{(1-\sin x)\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \frac{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x)}{\cancel{(1-\sin x)}\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \frac{1+\sin x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1-\sin^2 x}{\sin x} - \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin^2} x} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{\sin x}} - \frac{\cancel{\sin^2} x}{\cancel{\sin x}} - \frac{1}{\sin^2 x} - \cancel{\frac{1}{\sin x}} = \boxed{-\sin x - \frac{1}{\sin^2 x}}$$

331 $y = \sqrt[4]{\sin^3(x^2-3)} = \left[\sin^3(x^2-3)\right]^{\frac{1}{4}}$

$$y' = \frac{1}{4}\left[\sin^3(x^2-3)\right]^{-\frac{3}{4}} \cdot \left[\sin^3(x^2-3)\right]' =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt[4]{\sin^9(x^2-3)}} \cdot 3\left[\sin(x^2-3)\right]^2 \cdot \left[\sin(x^2-3)\right]' =$$

$$= \frac{3}{\cancel{4}_{2}}\,\frac{1}{\cancel{\sin^2(x^2-3)}\sqrt[4]{\sin(x^2-3)}} \cdot \cancel{\sin^2(x^2-3)} \cdot \cos(x^2-3) \cdot \cancel{2}x =$$

$$= \frac{3x\cos(x^2-3)}{2\sqrt[4]{\sin(x^2-3)}}$$

$$y = \sin^3(x^2-3) = \left[\sin(x^2-3)\right]^3 = t^3 \qquad t = \sin(x^2-3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = 3t^2 \cdot \left[\sin(x^2-3)\right]' = 3\sin^2(x^2-3)\cdot\cos(x^2-3)\cdot 2x$$

DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

$f: I \to J$ FUNZ. INVERSA $f^{-1}: J \to I$ tale che $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in I$

BIETTIVA

CONGETTURA

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

DERIVIAMO AMBO I MEMBRI

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$

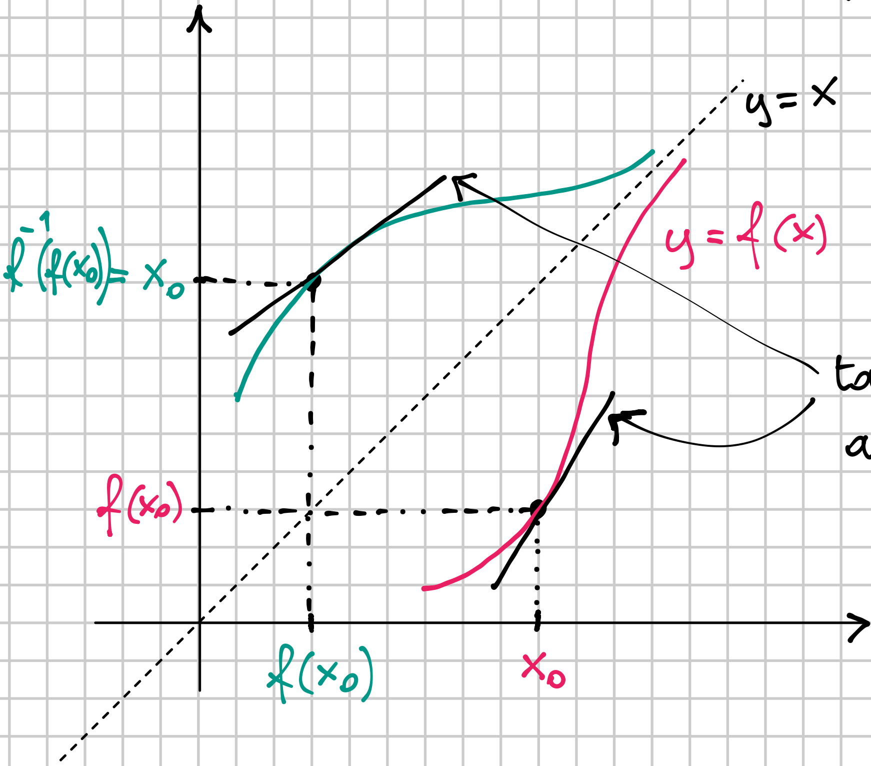
per definizione di funzione inversa

TEOREMA

$f: I \to \mathbb{R}$ INVERTIBILE E DERIVABILE $\Rightarrow f^{-1}$ È DERIVABILE DOVE $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$

E VALE

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$



tangenti hanno coefficienti angolari reciproci

$\Downarrow$

se la tangente di f in x_0 ha coeff. angolare $f'(x_0)$, l'inversa nel punto $f(x_0)$ ha coeff. angolare $\frac{1}{f'(x_0)}$

Se chiamo $f(x_0) = t$, questo coeff. angolare è

$\Downarrow$

$t = f^{-1}(x_0)$

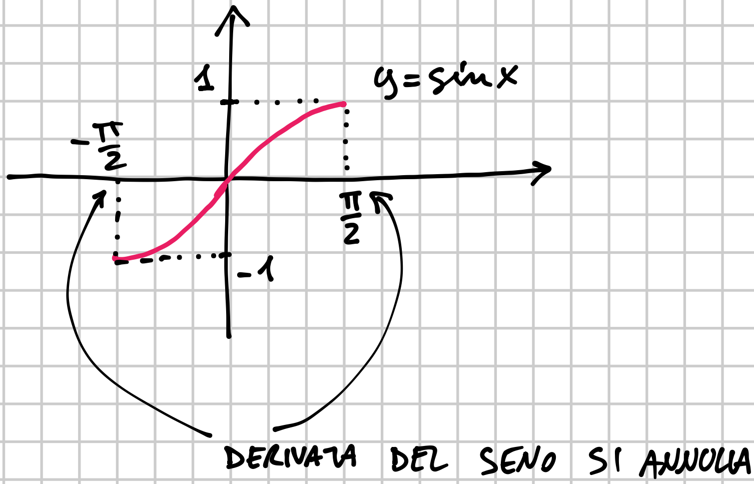
$$\frac{1}{f'(f^{-1}(t))} = (f^{-1})'(t)$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

ESEMPI

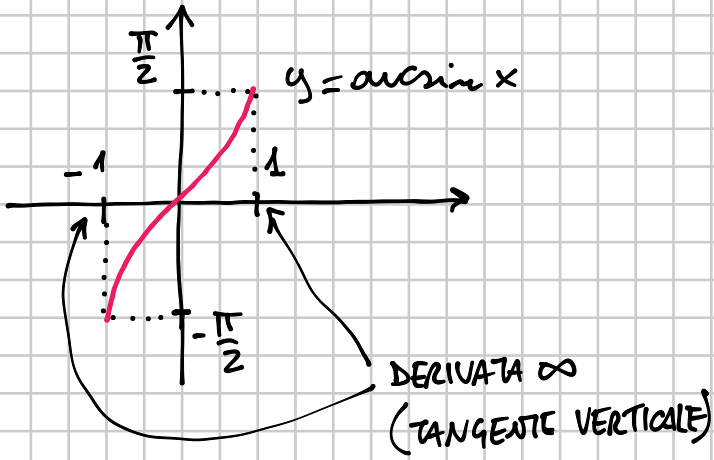
1) $f(x) = \sin x$

$$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \left]-1, 1\right[$$



Escludo $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ perché "dove" $f(x) = \sin x$ ha derivata nulla

$f^{-1}(x) = \arcsin x$ (la sua inversa) non è derivabile (nel senso che f^{-1} va valutata in $f(x)$) poiché ha derivata ∞.



In tutti gli altri punti dell'intervallo $]-1, 1[$ arcsin è derivabile e vale la formula

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

2) $\arccos :]-1, 1[\to]0, \pi[$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} =$$

$$= \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

4) Calcolare la derivata di $y = \ln x$ come inversa di $y = e^x$

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

LA NOTAZIONE DI LEIBNIZ $\frac{dy}{dx}$

- **FUNZIONE COMPOSTA**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

ESEMPIO

$$y = \ln(x^3+1) \qquad t = x^3+1 \quad \Rightarrow \quad y = \ln t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \qquad t = x^3+1 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{1}{t}}_{\frac{dy}{dt}} \cdot \underbrace{3x^2}_{\frac{dt}{dx}} = \frac{3x^2}{x^3+1}$$

- **FUNZIONE INVERSA**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

ESEMPIO

$$y = \sqrt[3]{x} \iff x = y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$