22/12/2020

451 $f(x) = x + 1 + \arctan x, \quad y_0 = 1.$ $\left[g'(1) = \frac{1}{2}\right]$

CALCOLARE $(f^{-1})'(1)$ $\qquad f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}$

$f^{-1}(1) = ?$ $\qquad x + 1 + \arctan x = 1 \Rightarrow x = 0 = f^{-1}(1)$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\underbrace{[f^{-1}(1)]^2}_{0}}} = \frac{1}{2}$$

453 $f(x) = 2\ln(x-2) + x, \quad y_0 = 3.$ $\left[g'(3) = \frac{1}{3}\right]$

Calcolare $(f^{-1})'(3)$

$f'(x) = \frac{2}{x-2} + 1$ $\qquad f^{-1}(3) = ?$ $\qquad 3 = 2\ln(x-2) + x$

$\Downarrow$

$x = 3 = f^{-1}(3)$

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{\frac{2}{\underbrace{f^{-1}(3)}_{3} - 2} + 1} =$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{3-2} + 1} = \frac{1}{3}$$

564 $y = \ln x^{\sin x}$ $\left[y' = \cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x} \right]$

$$y = \sin x \cdot \ln x$$

$$y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

579 $y = \sqrt{\tan 3x^2}$ $\left[y' = \dfrac{3x}{\cos^2 3x^2 \cdot \sqrt{\tan 3x^2}} \right]$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\tan 3x^2}} \cdot \left(\tan 3x^2\right)' =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\tan 3x^2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 3x^2} \cdot \overbrace{{}^{3}\cancel{6}x}^{(3x^2)'} =$$

$$= \frac{3x}{\cos^2 3x^2 \sqrt{\tan 3x^2}}$$

597 $y = \overbrace{\ln x^2}^{2\ln x} + \arctan \dfrac{x-3}{x+3}$ $\left[y' = \dfrac{2x^2+3x+18}{x(x^2+9)} \right]$

$$y' = \frac{2}{x} + \frac{1}{1+\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^2} \cdot \left(\frac{x-3}{x+3}\right)' =$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{1}{1+\frac{(x-3)^2}{(x+3)^2}} \cdot \frac{\cancel{x}+3-\cancel{x}+3}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{6}{(x+3)^2+(x-3)^2} = \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2+9+\cancel{6x}+x^2+9-\cancel{6x}}$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{6}{2(x^2+9)} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}(x^2+9)+\overset{3}{\cancel{6}}x}{\cancel{2}x(x^2+9)} = \frac{2x^2+3x+18}{x(x^2+9)}$$

593 $y = \sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ $\left[y' = -\dfrac{\cos x}{|\cos x|(1+\sin x)} \right]$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}} \cdot \left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\dfrac{\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}}} \cdot \frac{-\cos x(1+\sin x) - \cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2} =$$

SI PUÒ FARE PERCHÉ I RADICANDI SONO POSITIVI

$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ è sempre vero? NO

È vero solo se $a, b > 0$

$\sqrt{\dfrac{-5}{-3}}$ esiste, ma non posso scrivere $\dfrac{\sqrt{-5}}{\sqrt{-3}}$

$$= \frac{-\cos x\left[1+\cancel{\sin x}+1-\cancel{\sin x}\right]}{2\dfrac{\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}}(1+\sin x)^2 \cdot \dfrac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}}} =$$

$$= \frac{-\cancel{2}\cos x}{\cancel{2}\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\cancel{1+\sin x}} \cdot (1+\sin x)^{\cancel{2}}} =$$

$$= -\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}\,(1+\sin x)} = -\frac{\cos x}{|\cos x|(1+\sin x)} = \begin{cases} -\dfrac{1}{1+\sin x} & \text{se } \cos x > 0 \\ \dfrac{1}{1+\sin x} & \text{se } \cos x < 0 \end{cases}$$

$$= -\frac{\text{sign}(\cos x)}{1+\sin x}$$

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \text{sign}(x) = |x|'$$

$$\text{sign}(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} \Rightarrow \text{sign}(\cos x) = \frac{\cos x}{|\cos x|}$$

580 $y = \dfrac{\ln(x+1)^2}{2e^x}$ $\left[y' = \dfrac{1-(x+1)\ln(x+1)}{e^x(x+1)}\right]$

$$y = \frac{\cancel{2}\ln(x+1)}{\cancel{2}e^x} = \frac{\ln(x+1)}{e^x}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{x+1}\cdot e^x - e^x\ln(x+1)}{e^{2x}} =$$

$$= \frac{e^x - e^x(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)\,e^{2x}} = \frac{\cancel{e^x}\left(1-(x+1)\ln(x+1)\right)}{(x+1)\,e^{\cancel{2x}\,x}} =$$

$$= \frac{1-(x+1)\ln(x+1)}{e^x(x+1)}$$

596 $y = \ln \tan \sqrt{e^{5x}}$ $\left[y' = \dfrac{5\sqrt{e^{5x}}}{\sin 2\sqrt{e^{5x}}}\right]$

$$y' = \frac{1}{\tan\sqrt{e^{5x}}} \cdot \left(\tan\sqrt{e^{5x}}\right)' =$$

$$\sqrt{e^{5x}} = e^{\frac{5}{2}x}$$

$$= \frac{1}{\tan\sqrt{e^{5x}}} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{e^{5x}}} \cdot \left(\sqrt{e^{5x}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\tan\sqrt{e^{5x}}} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{e^{5x}}} \cdot e^{\frac{5}{2}x} \cdot \frac{5}{2} =$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

$$= \frac{5\sqrt{e^{5x}}}{\dfrac{\sin\sqrt{e^{5x}}}{\cancel{\cos\sqrt{e^{5x}}}} \cdot \cos^{\cancel{2}}\sqrt{e^{5x}} \cdot 2} =$$

$$= \frac{5\sqrt{e^{5x}}}{\sin 2\sqrt{e^{5x}}}$$

Calcola la derivata seconda delle seguenti funzioni.

619 $y = x^4 - 2x^2 - 1$ $[y'' = 4(3x^2 - 1)]$

$y' = 4x^3 - 4x$ DERIVATA (PRIMA) $\dfrac{dy}{dx}$

$y'' = 12x^2 - 4$ DERIVATA SECONDA

$\hookrightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}$

661 $y = 2\ln^2 x - x^2$, 1. $[y = -2x + 1]$

$\ln^2 x =$
$= (\ln x)^2$

Scrivere la retta tangente al grafico nel punto di ascissa 1

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)}$$

RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI $y = f(x)$ NEL PUNTO $(x_0, f(x_0))$

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

$$f'(x) = 2 \cdot 2 \ln x \cdot (\ln x)' - 2x$$

$$= \frac{4 \ln x}{x} - 2x \implies f'(1) = \frac{4 \ln 1}{1} - 2 \cdot 1 = -2$$

$$f(1) = 2 \ln^2 1 - 1^2 = -1$$

$$y - (-1) = -2\,(x - 1)$$

$$y + 1 = -2x + 2$$

$$\boxed{y = -2x + 1}$$

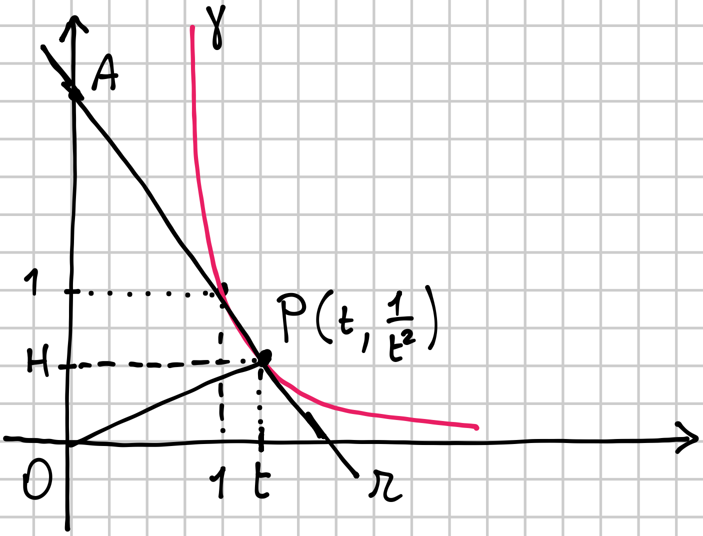
703 Data nel piano Oxy la curva γ di equazione $y = \frac{1}{x^2}$, sia P un punto di γ di ascissa $t > 0$ e sia r la retta tangente a γ nel punto P.

a. Esprimi in funzione di t l'area S_1 del triangolo OPA, essendo A l'intersezione di r con l'asse y.

b. Detta n la normale a γ per P, esprimi in funzione di t l'area S_2 del triangolo OPB, essendo B l'intersezione di n con l'asse x.

c. Calcola il limite $\lim_{t \to +\infty} \frac{S_1}{S_2}$.

$\left[\text{a) } S_1(t) = \frac{3}{2t}; \text{ b) } S_2(t) = \frac{t^6 - 2}{2t^7}; \text{ c) } 3\right]$



a) $t > 0$

$\mathcal{A}_{OPA}(t) = ?$

$= \frac{1}{2}\overline{OA} \cdot \overline{PH}$

$P\left(t, \frac{1}{t^2}\right)$

$\overline{PH} = t$

$f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

$f'(t) = -\frac{2}{t^3}$ coeff. angolare di r

$$\begin{cases} y - \frac{1}{t^2} = -\frac{2}{t^3}(x - t) & \text{TANGENTE} \\ x = 0 & \text{ASSE } y \end{cases}$$

$\Rightarrow y - \frac{1}{t^2} = \frac{2}{t^2}$

$A\left(0, \frac{3}{t^2}\right) \leftarrow y = \frac{3}{t^2}$

$\Rightarrow \overline{OA} = \frac{3}{t^2}$

$\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{t^2} \cdot t = \frac{3}{2t} \rightsquigarrow S_1(t) = \frac{3}{2t}$ (NOTAZIONE LIBRO)