

12/10/2021

$$y = mx + q$$

$$y = m'x + q'$$

$$m = m' \quad \text{CONDIZ. DI PARALLELISMO}$$

$$m \cdot m' = -1 \quad \text{CONDIZ. DI PERPENDICOLARITÀ}$$

$$m' = -\frac{1}{m}$$

ANTIRECIPROCO DI  $m'$  (opposto del reciproco)

### ESEMPI

$$1) y = 3x + 7 \quad // \quad y = 3x + 9$$

$$2) y = 2x - 2 \quad \perp \quad y = -\frac{1}{2}x + 5 \quad \text{infatti } 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

**308** Scrivi l'equazione della retta passante per l'origine e perpendicolare alla retta di equazione  $y = -\frac{2}{3}x - 1$ .

$$\left[ y = \frac{3}{2}x \right]$$

- RETTA PASSANTE PER L'ORIGINE:  $q = 0 \Rightarrow y = m'x$  DA TROVARE

- RETTA  $\perp$   $y = -\frac{2}{3}x - 1 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$  antireciproco di  $-\frac{2}{3}$

$$y = \frac{3}{2}x$$

**314** Determina per quali valori di  $k$  la retta di equazione  $2x - (k - 2)y + 2 = 0$  è:

- parallela alla retta di equazione  $y = 2x + 1$ ;
- perpendicolare alla retta di equazione  $y = \frac{1}{3}x$ .

$$\left[ \text{a. } k = 3; \text{ b. } k = \frac{4}{3} \right]$$

a)  $2x - (k - 2)y + 2 = 0 \rightarrow$  trasformiamo in forme esplicite

$$-(k - 2)y = -2x - 2 \quad k \neq 2$$

$$y = \frac{2}{k - 2}x + \frac{2}{k - 2} \quad // \quad y = 2x + 1$$

$$\frac{2}{k - 2} = 2$$

$$2 = 2k - 4 \quad 2k = 6$$

$$\boxed{k = 3}$$

La retta cercata è  $2x - (3 - 2)y + 2 = 0$   $2x - y + 2 = 0$   
 $y = 2x + 2$   
sostituisco  $k = 3$

b)  $y = \frac{2}{k - 2}x + \frac{2}{k - 2} \perp y = \frac{1}{3}x$

$$k \neq 2$$

$$\frac{2}{k - 2} = -3$$

$$2 = -3k + 6$$

anticipamos  
di  $\frac{1}{3}$

$$3k = 4$$

$$\boxed{k = \frac{4}{3}}$$

La retta è  $y = \frac{2}{\frac{4}{3} - 2}x + \frac{2}{\frac{4}{3} - 2}$

$$y = \frac{2}{-\frac{2}{3}}x + \frac{2}{-\frac{2}{3}}$$

$$y = -3x - 3$$

# FASCIO PROPRIO DI RETTE

DI CENTRO UN PUNTO DATO

(PASSANTI PER UN PUNTO DATO)

Prendiamo il punto  $P(2, 1)$

se  $y = mx + q$  passa per  $P$  deve essere che

$$1 = 2m + q \quad (\text{deve soddisfare l'equazione})$$

$\Downarrow$

$$q = -2m + 1$$

$$y = mx - 2m + 1$$

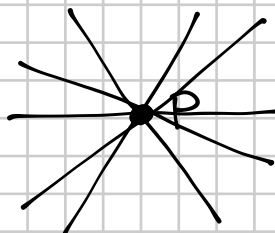
$$y - 1 = m(x - 2)$$

In generale se  $P(x_0, y_0)$  ← punto fisso

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

EQUAZIONE DEL  
FASCIO PROPRIO DI  
RETTE PASSANTI PER  
 $P(x_0, y_0)$  (DI CENTRO  $P$ )

Ogni volta che ds un valore a  $m$  ottengo l'equazione di una retta passante per  $P$



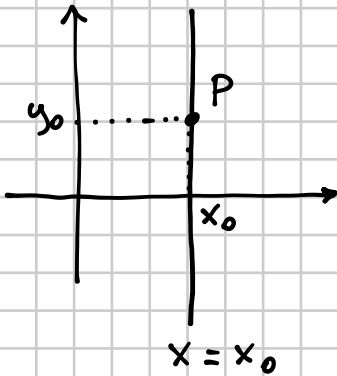
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

rappresenta, al variare di  $m$ , tutte le  
rette passanti per  $P(x_0, y_0)$ ,

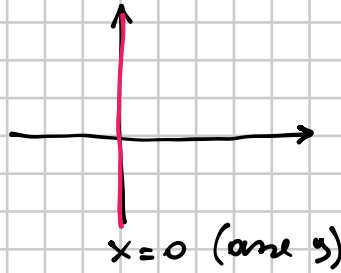
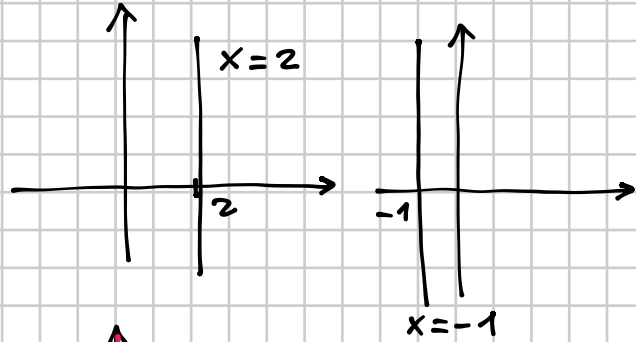
tranne quella parallela all'asse  $y$ ,

cioè

↑ quella verticale

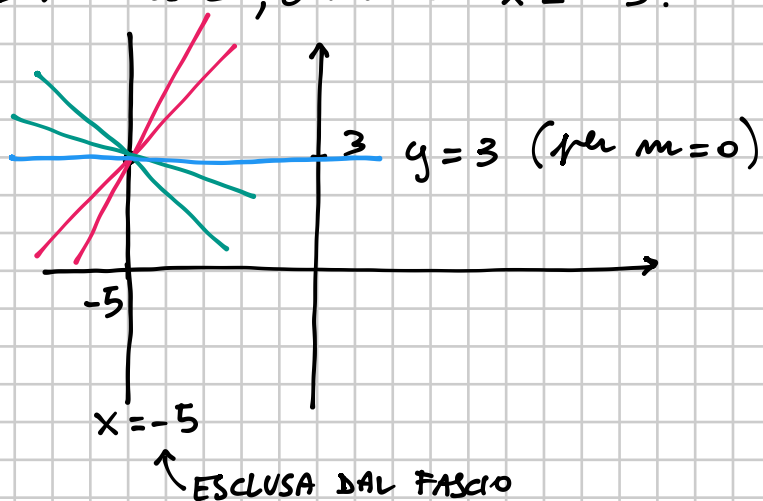


### RETTE VERTICALI ( // ASSE $y$ )



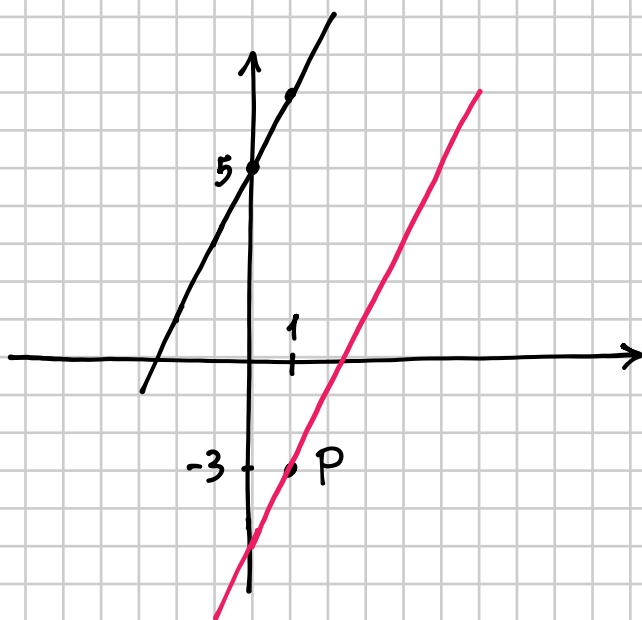
Ad es.  $y - 3 = m(x + 5)$

representa il fascio proprio di rette di centro  $P(-5, 3)$ , cioè l'insieme di tutte le rette passanti per  $P(-5, 3)$  tranne quella verticale, ovvero  $x = -5$ .



### ESERCIZI CLASSICI

1) Trovare la retta per  $P(1, -3)$  parallela alla retta  $y = 2x + 5$



FASCIO DI RETTE PER  $P(1, -3)$

$$y + 3 = m(x - 1)$$

⇓

Siccome cerco la parallela

a  $y = 2x + 5$ , prendo  $m = 2$

$$y + 3 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 2 - 3$$

$$\boxed{y = 2x - 5}$$

2) Trovare la retta per  $P(-7, \frac{1}{2})$  perpendicolare alla retta  $y = \frac{3}{2}x + 24$

- trovo il fascio proprio di rette per P

$$y - \frac{1}{2} = m(x + 7)$$

- prendo  $m = -\frac{2}{3}$

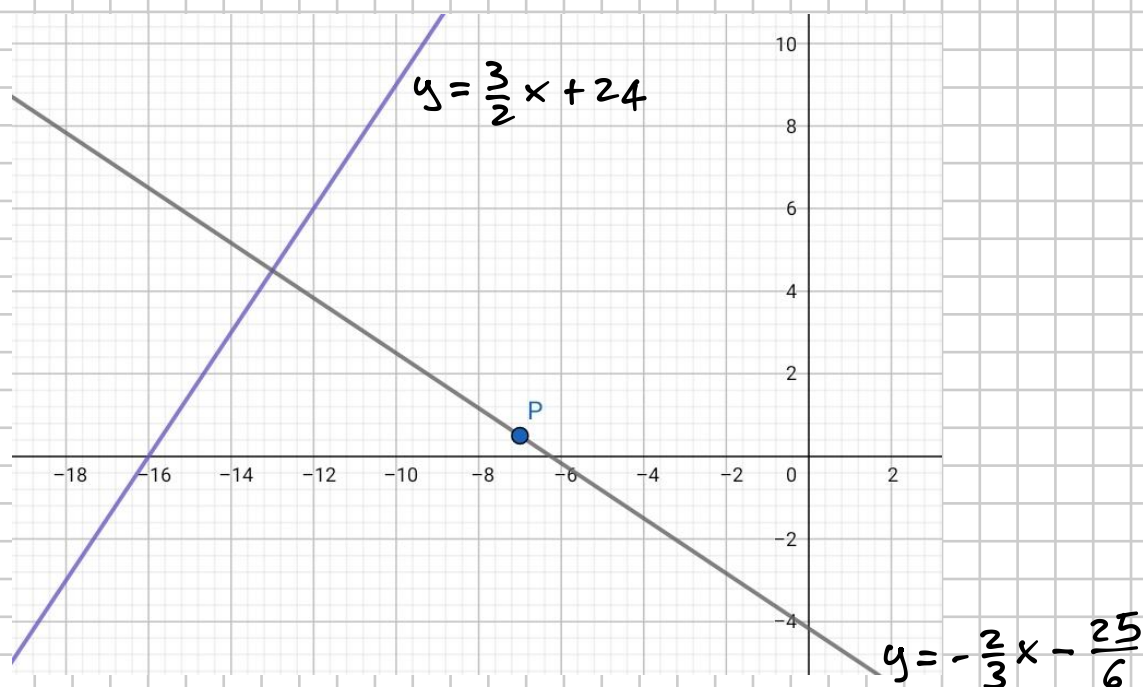
$$y - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}(x + 7)$$

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{14}{3} + \frac{1}{2}$$

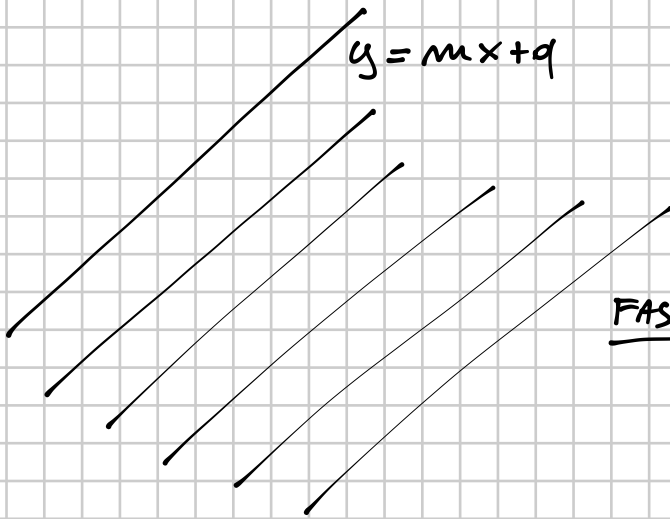
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{-28 + 3}{6}$$

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{25}{6}$$

retta per P  
perpend. a  $y = \frac{3}{2}x + 24$



## FASCIO IMPROPRIO DI RETTE



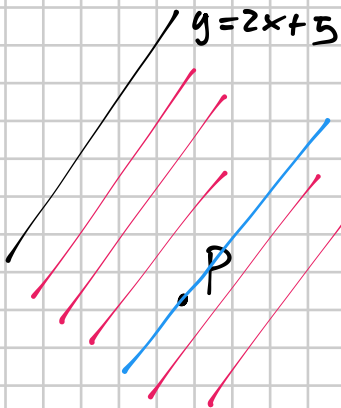
FASCIO IMPROPRIO = insieme di rette  
parallele o una  
retta data

Se ad esempio assumo la retta  $y = 2x + 5$  come RETTA BASE,  
l'insieme delle rette parallele ad essa è rappresentato  
dall'equazione

$$y = 2x + q \quad (\text{con } q \text{ che varia})$$

### ESEMPIO DI APPLICAZIONE

Trovare la retta parallela a  $y = 2x + 5$  passante per  $P(1, -3)$ .



- Considero il fascio improprio  $y = 2x + q$
- Scelgo fra le rette del fascio quella  
che passa per  $P(1, -3)$

$$y = 2x + q$$

$$-3 = 2 \cdot 1 + q \Rightarrow q = -5$$

$$y = 2x - 5$$

Trova l'eq. della retta per P parallela ad  $r$

**330**  $P(1, 3)$

$$r: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

$$r: \frac{y}{3} = -\frac{x}{2} + 1 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$y - 3 = m(x - 1) \quad (\text{fascio proprio})$$

$$m = -\frac{3}{2} \Rightarrow y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 1)$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + 3$$

$$\boxed{y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}}$$

Trovare la retta per P perpendicolare a  $r$

**344**  $P(-1, 1)$   $r: x + 4y - 1 = 0$

$$[y = 4x + 5]$$

$$r: 4y = -x + 1 \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

ANTIRECIPROCO

$$y - 1 = m(x + 1) \quad \text{fascio proprio per } P$$

$$m = 4$$

$$y - 1 = 4(x + 1)$$

$$y = 4x + 4 + 1$$

$$\boxed{y = 4x + 5}$$



**318** Determina per quali valori di  $k$  la retta di equazione  $(k-2)x - 2y + 1 = 0$ :

- a. passa per il punto  $P(1, -1)$ ;
- b. è parallela all'asse  $x$ ;
- c. è parallela all'asse  $y$ ;
- d. è parallela alla retta di equazione  $y = -2x$ ;
- e. è perpendicolare alla retta di equazione  $x + y + 3 = 0$ .

[a.  $k = -1$ ; b.  $k = 2$ ; c. impossibile; d.  $k = -2$ ; e.  $k = 4$ ]

a) Sostituisci  $P(1, -1)$   $(k-2) \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 1 = 0$

$$k - 2 + 2 + 1 = 0 \quad k = -1$$

(per avere l'eq. della retta sostituisci il valore di  $k$  trovato)

b) Nell'equazione deve comparire solo la  $y$ , perché deve essere del tipo  $y = -1$ ,  $y = 2$ ,  $y = 7$ , ecc... e ciò avviene se il coeff. della  $x$  è 0

$$k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$$

c) Deve essere 0 il coeff. della  $y$ . Ma questo è  $-2 \neq 0$

IMPOSSIBILE

d)  $(k-2)x - 2y + 1 = 0$  //  $y = -2x$

$$2y = (k-2)x + 1$$

$$y = \frac{k-2}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\frac{k-2}{2} = -2 \quad k-2 = -4$$

$$k = -2$$

e)  $(k-2)x - 2y + 1 = 0$   $\perp$   $x + y + 3 = 0$

$$y = \frac{k-2}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y = -x - 3$$

$$\frac{k-2}{2} = 1$$

$$k = 4$$

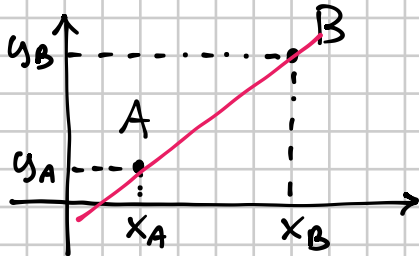
ANTIRECIPROCO = +1

## RETTA PER 2 PUNTI

$A(x_A, y_A)$        $B(x_B, y_B)$

CASO 1: i due punti A e B non stanno né nella stessa orizzontale

né nella stessa verticale



$$x_A \neq x_B \quad y_A \neq y_B$$

$y = mx + q$  equazione generale

$m$  e  $q$  DA TROVARE!

pongo per  $A(x_A, y_A) \Rightarrow \begin{cases} y_A = mx_A + q \end{cases}$

pongo per  $B(x_B, y_B) \Rightarrow \begin{cases} y_B = mx_B + q \end{cases}$

sistema nelle  
incognite  $m$  e  $q$

$$y_A - y_B = m(x_A - x_B)$$

$\Downarrow$

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

$$y_A = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} x_A + q$$

$$q = y_A - \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} x_A$$

$$y = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} x + y_A - \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} x_A$$

$$y - y_A = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} x - \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} x_A$$

$$y - y_A = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} (x - x_A) \Rightarrow \frac{y - y_A}{y_A - y_B} = \frac{x - x_A}{x_A - x_B}$$

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

ESEMPIO

Retta per  $A \begin{matrix} x_A & y_A \\ (1, & 2) \end{matrix}$   $B \begin{matrix} x_B & y_B \\ (-2, & 3) \end{matrix}$

$$\frac{y - 2}{3 - 2} = \frac{x - 1}{-2 - 1}$$

$$y - 2 = \frac{x - 1}{-3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 2$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$