RICHIAMI SUGLI INSIEMI NUMERICI

28/10/2021

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ NUMERI NATURALI

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ NUMERI INTERI (RELATIVI)

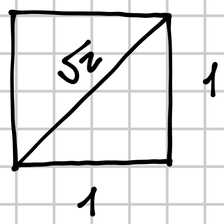
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} = \left\{ \dots, \frac{1}{2}, \frac{5}{3}, -\frac{7}{12}, 0, -3, 2, -\frac{15}{8}, \dots \right\}$

NUMERI RAZIONALI

Tra due numeri $a, b \in \mathbb{Q}$ esistono infiniti numeri razionali (basta considerare la media aritmetica $\frac{a+b}{2}$, che è ancora un numero razionale, e iterare il procedimento).

$\mathbb{Q}$ non contiene numeri importanti come $\sqrt{2}, \pi, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}+1, \dots$

ad es., non c'è un numero che esprime la lunghezza della diagonale del quadrato di lato 1

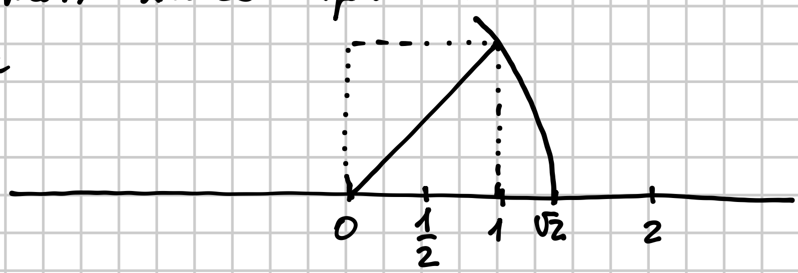


$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ = INSIEME DEI NUMERI REALI = $\mathbb{Q} \cup \{x \mid x \text{ è irrazionale}\}$

↓

possono essere messi in corrispondenza biunivoca coi punti di una retta



$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

DIMOSTRAZIONE

Suppongo che $\sqrt{2}$ si posse scrivere come frazione di numeri interi, cioè che $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$ tali che

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad \text{con } p, q \text{ primi tra loro}$$

elevo al quadrato

se fosse dispari lo sarebbe anche il suo quadrato

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \text{ è pari} \Rightarrow p \text{ pari}$$

$$\Rightarrow p = 2m \Rightarrow 4m^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow q^2 \text{ è pari}$$

$\Rightarrow q$ pari ASSURDO perché p, q sono primi tra loro, per cui non possono essere entrambi pari

Quindi l'affermazione di partenza $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ è falsa, cioè non esistono numeri interi il cui rapporto è $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, cioè $\sqrt{2}$ è IRRAZIONALE.

I numeri razionali sono:

- NUMERI INTERI: $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{-12}{-4} \dots$

- NUMERI DECIMALI LIMITATI: $0,157 = \frac{157}{1000}$ $\quad 36,84 = \frac{3684}{100}$

- NUMERI PERIODICI: $5,\overline{3} = \frac{53-5}{9} = \frac{48}{9}$ $\quad 1,2\overline{78} = \frac{1278-12}{990}$

possiamo anche osservare che un numero razionale, cioè esprimibile come rapporto di due numeri interi o è ancora intero, o è decimale limitato (se la divisione a un certo punto mi dà resto 0) o è periodico. Ad esempio:

$$
\begin{array}{l|l}
41 & 7 \\ \hline
\;60 & 5,\overline{857142} \\
\;\;40 & \\
\;\;\;50 & \\
\;\;\;\;10 & \\
\;\;\;\;\;30 & \\
\;\;\;\;\;\;20 & \\
\;\;\;\;\;\;\;6 &
\end{array}
\qquad \frac{41}{7} = 5,\overline{857142}
$$

infatti i resti possibili sono 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 cioè sono in numero finito, quindi prima o poi ritrovo un resto già ottenuto e da lì riparte il periodo.

I numeri <u>IRRAZIONALI</u> sono quelli che hanno una coda decimale <u>ILLIMITATA E NON PERIODICA</u>. Ad es.:

$0,10110111011110111110111111 0 \dots$

$\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$

$\pi = 3,141592 \dots$

⋮

proseguono all'infinito senza periodo

CURIOSITÀ

$$1,2\overline{78} = \frac{1278-12}{990} = \frac{1266}{990}$$

$$1,2\overline{78} = 1 + 0,2 + 0,0\overline{78} = 1 + \frac{2}{10} + 0,078787878\ldots = (*)$$

$$0,078787878\ldots = x \qquad 1000x = 78,787878\ldots =$$

$$= 78 + 0,787878\ldots$$

$$= 78 + 10x$$

$$1000x - 10x = 78$$

$$990x = 78 \Rightarrow x = \frac{\overbrace{78}^{\text{PERIODO}}}{990}$$

$$(*) = 1 + \frac{2}{10} + \frac{78}{990} = \frac{990 \times 1 + 99 \times 2 + 78}{990} =$$

$$= \frac{(1000-10) \times 1 + (100-1) \times 2 + 78}{990} =$$

$$= \frac{\overbrace{1000 \times 1 + 100 \times 2 + 78}^{\text{NUMERO SENZA VIRGOLA E PERIODO}} - \overbrace{(10 \times 1 + 2)}^{\text{CIÓ CHE PRECEDE IL PERIODO}}}{990} = \frac{1278 - 12}{990}$$