

POTENZE A ESPONENTE RAZIONALE

DEFINIZIONE | Potenza con esponente razionale positivo

Sia a un numero reale, con $a \geq 0$ e siano m e n numeri naturali, con $m \neq 0$ e $n \neq 0$.
Poniamo, per definizione:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

In questo modo si vede che tutte le proprietà dei radicali corrispondono alle proprietà delle potenze.

ESEMPI

$$1) \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6} \qquad 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}}$$

$$2) \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2}$$
$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{6}} \cdot 3^{\frac{2}{6}} = (2^3 \cdot 3^2)^{\frac{1}{6}}$$

$$3) \sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[10]{2^5} \cdot \sqrt[10]{2^2} = \sqrt[10]{2^7}$$
$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}} = 2^{\frac{5+2}{10}} = 2^{\frac{7}{10}}$$

$$4) \sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[6]{7} \qquad \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{6}}$$

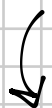
$$5^{-\frac{2}{3}} = ?$$

Se devono valere le proprietà delle potenze, deve essere

$$5^{-\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}} = 5^0 = 1$$

$$5^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{5^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$$

$$\sqrt{5\sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt{5^3}} = \sqrt[4]{5^3}$$



$$(5 \cdot 5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{4}}$$

OSSERVAZIONE

La definizione non vale per $a < 0$. Perché?

Ad es., se prendo $a = -4$

$$(-4)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-4)^2} \text{ che esiste ed } \bar{e} > 0 \text{ (positivo)}$$

$$(-4)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-4} \text{ che esiste, ma } \bar{e} < 0$$

eppure $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Questa è una contraddizione, per cui si prendono solo radicandi positivi!

$$\mathbf{821} \quad \frac{2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{1}{2}}};$$

SEMPLIFICARE

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$= 2^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - (-\frac{1}{2})} = 2^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}} = 2^{\frac{1+3+2}{4}} = 2^{\frac{6}{4}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$830 \quad m^{\frac{2}{3}} \left(2m^{\frac{1}{3}} + m^{-\frac{2}{3}} \right)$$

$$[2m + 1]$$

$$831 \quad 16^{\frac{3}{4}} : \left(\frac{1}{16} \right)^{-\frac{1}{2}} : 4^{\frac{3}{2}}$$

$$\left[\frac{1}{4} \right]$$

$$\begin{aligned} \boxed{830} \quad m^{\frac{2}{3}} \left(2m^{\frac{1}{3}} + m^{-\frac{2}{3}} \right) &= 2m^{\frac{1}{3}} \cdot m^{\frac{2}{3}} + m^{\frac{2}{3}} \cdot m^{-\frac{2}{3}} = \\ &= 2m^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} + m^0 = 2m^{\frac{3}{3}} + 1 = \boxed{2m + 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{831} \quad 16^{\frac{3}{4}} : \left(\frac{1}{16} \right)^{-\frac{1}{2}} : 4^{\frac{3}{2}} =$$

$$= (4^2)^{\frac{3}{4}} : 16^{\frac{1}{2}} : 4^{\frac{3}{2}} = 4^{2 \cdot \frac{3}{4}} : (4^2)^{\frac{1}{2}} : 4^{\frac{3}{2}} =$$

$$= 4^{\frac{3}{2}} : 4 : 4^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2} - 1 - \frac{3}{2}} = 4^{-1} = \boxed{\frac{1}{4}}$$