POTENZE A ESPONENTE RAZIONALE

DEFINIZIONE | Potenza con esponente razionale positivo

Sia a un numero reale, con $a \geq 0$ e siano m e n numeri naturali, con $m \neq 0$ e $n \neq 0$.
Poniamo, per definizione:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

In questo modo si vede che tutte le proprietà dei radicali corrispondono alle proprietà delle potenze.

ESEMPI

1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$ $\qquad$ $2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}}$

2) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2}$

$2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{6}} \cdot 3^{\frac{2}{6}} = (2^3 \cdot 3^2)^{\frac{1}{6}}$

3) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[10]{2^5} \cdot \sqrt[10]{2^2} = \sqrt[10]{2^7}$

$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}} = 2^{\frac{5+2}{10}} = 2^{\frac{7}{10}}$

4) $\sqrt{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[6]{7}$ $\qquad$ $\left(7^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{6}}$

$5^{-\frac{2}{3}} = ?$

Se devono valere le proprietà delle potenze, deve essere

$$5^{-\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}} = 5^0 = 1$$

$$5^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{5^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$$

$$\sqrt{5\sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt{5^3}} = \sqrt[4]{5^3}$$

$$\left(5 \cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{4}}$$

OSSERVAZIONE

La definizione non vale per $a < 0$. Perché?

Ad es., se prendo $a = -4$

$(-4)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-4)^2}$ che esiste ed è > 0 (positivo)

$(-4)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-4}$ che esiste, ma è < 0

eppure $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Questa è una contraddizione, per cui si prendono solo radicandi positivi!

821 $\dfrac{2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{1}{2}}}$; SEMPLIFICARE $\qquad \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$= 2^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1+3+2}{4}} = 2^{\frac{6}{4}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

830 $m^{\frac{2}{3}}\left(2m^{\frac{1}{3}}+m^{-\frac{2}{3}}\right)$ $[2m+1]$

831 $16^{\frac{3}{4}}:\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}:4^{\frac{3}{2}}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

$\boxed{830}$ $m^{\frac{2}{3}}\left(2m^{\frac{1}{3}}+m^{-\frac{2}{3}}\right)=2m^{\frac{1}{3}}\cdot m^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}}\cdot m^{-\frac{2}{3}}=$

$=2m^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}+m^{0}=2m^{\frac{3}{3}}+1=\boxed{2m+1}$

$\boxed{831}$ $16^{\frac{3}{4}}:\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}:4^{\frac{3}{2}}=$

$=(4^2)^{\frac{3}{4}}:16^{\frac{1}{2}}:4^{\frac{3}{2}}=4^{2\cdot\frac{3}{4}}:(4^2)^{\frac{1}{2}}:4^{\frac{3}{2}}=$

$=4^{\frac{3}{2}}:4:4^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{3}{2}-1-\frac{3}{2}}=4^{-1}=\boxed{\frac{1}{4}}$