

EQUAZIONI DI 2° GRADO

ESEMPI

$$1) \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

Ci sono due valori che sostituiti
alla x rendono vera l'equazione.
Sono 1 e 2. Non ce ne sono altri

↓ SCOMPONENDO

$$(x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow \text{Applicando la LEgge DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO}$$

$$x-2=0 \quad \vee \quad x-1=0$$

$$\boxed{x=2 \quad \vee \quad x=1}$$

L'insieme soluzione è $S = \{1, 2\}$

$$2) \quad 2x^2 - 8 = 0$$

$$2(x^2 - 4) = 0$$

$$\sqrt{2}(x+2)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -2 \vee x = 2 \quad \text{che sono abbinati}$$

con

$$\boxed{x = \pm 2}$$

LEgge DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

Da ciò discende che

$$a \cdot b = 0 \text{ e } a \neq 0 \Rightarrow b = 0$$

Si poteva risolvere anche

con:

$$2x^2 - 8 = 0 \quad 2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4 \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$3) x^2 = 5 \quad x = \pm\sqrt{5}$$

$$4) x^2 + 8 = 0 \quad x^2 = -8 \quad \text{IMPOSSIBILE IN } \mathbb{R}$$

$$5) x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \quad \xrightarrow{\text{legge di A.P.}} \quad x-1=0 \Rightarrow x=1$$

Questa soluzione è
contata 2 volte, si dice
che ha MOLTEPLICITÀ 2
o che è una soluzione DOPPIA

Rifatti è come se $(x-1)(x-1) = 0$

↓ legge A.P.

$$x-1=0 \quad \vee \quad x-1=0$$

$$x=1 \quad x=1$$

è come avere due
soluzioni uguali (COINCIDENTI)

$$6) x^2 - 7x = 0$$

$$x(x-7) = 0 \Rightarrow x=0 \quad \vee \quad x-7=0$$

legge A.P.

$$\boxed{x=0 \quad \vee \quad x=7}$$

Un'equazione di 2° grado si presenta (ridotta in forma NORMALE)

così:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$a \neq 0$$

1) CASO $b=0$

$(a, c \neq 0)$ $ax^2 + c = 0$ EQ. DI 2° GRADO PURA

$$ax^2 = -c \quad x^2 = -\frac{c}{a} \quad x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Un'equazione pura ha soluzioni reali se c e a hanno segni opposti, altrimenti $-\frac{c}{a}$ è negativo.

ESEMPI

• $3x^2 - 1 = 0$ $3x^2 = 1$ $x^2 = \frac{1}{3}$ $x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$
($x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$)
razionalizzando il den.

• $3x^2 + 1 = 0$ $3x^2 = -1$
↑
IMPOSSIBILE IN \mathbb{R}

2) caso $\boxed{c=0}$

$(a, b \neq 0)$ $ax^2 + bx = 0$ EQ. DI 2° GRADO SPURIA

$$x(ax + b) = 0$$

\Downarrow

$$x = 0 \quad \vee \quad ax + b = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -\frac{b}{a}$$

Un'eq. spuria ha sempre due soluzioni reali, una delle quali è 0.

• $7x^2 - 5x = 0$ $x(7x - 5) = 0$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{5}{7}$$

• $4x^2 + 8x = 0$ $x(4x + 8) = 0$ [oppure $4x(x + 2)$]

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -2$$

3) caso $a, b, c \neq 0$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{EQ. DI 2° GRADO COMPLETA}$$

1° PASSO Si guarda il DISCRIMINANTE (DELTA) $\Delta = b^2 - 4ac$

2° PASSO

$$\Delta > 0$$

2 SOLUZIONI DISTINTE

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0$$

2 SOLUZIONI COINCIDENTI
(DI FATTO 1 SOLUZ.)

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$\Delta < 0$$

IMPOSSIBILE IN \mathbb{R}

(NESSUNA SOLUZ. REALE)

ESEMPI

1) $2x^2 - x - 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

$$a = 2 \quad b = -1 \quad c = -1$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \\ \frac{1+3}{4} = 1 \end{cases}$$

$$x = -\frac{1}{2} \vee x = 1$$

Infatti

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1^2 - 1 - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$$

$$2) 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$$

2 SOL. COINCIDENTI

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Infatti $x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{4}{4} - 2 + 1 = 0$

$$3) x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

NESSUNA SOLUZ. REALE

Ciò non esiste nessun numero reale che al posto di x renda l'equazione $x^2 + x + 1 = 0$ vera.

Infatti $x^2 + x + 1 = \underbrace{x^2 + x + \frac{1}{4}}_{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{4} + 1 = \underbrace{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0 \forall x \in \mathbb{R}} + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall x$

Dimostriamo

$$a \neq 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta \geq 0$$

\Downarrow

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a \neq 0$$

$$\cancel{a} \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0$$

aggiungo e tolo

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$2|a| = \begin{cases} 2a & \text{se } a > 0 \\ -2a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

con il \pm davanti diventa

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Risolvi le seguenti equazioni.

156 $2x^2 + 3x = -1$

$$\left[-\frac{1}{2}; -1\right]$$

157 $-x^2 = x - 12$

$$[-4; 3]$$

158 $2x^2 - 5 = -4x$

$$\left[\frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}\right]$$

156 $2x^2 + 3x = -1$

$$2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$a=2 \quad b=3 \quad c=1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{4} = \begin{cases} -\frac{4}{4} = -1 \\ -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x = -1 \vee x = -\frac{1}{2}$$

157 $-x^2 = x - 12$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$\Delta = 1 + 48 = 49$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} -\frac{8}{2} = -4 \\ \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

$$x = -4 \vee x = 3$$

158

$$2x^2 - 5 = -4x$$

$$2x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\Delta = 16 + 40 = 56$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{56}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \cdot 14}}{4} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{14}}{4} =$$

$$= \frac{\cancel{2}(-2 \pm \sqrt{14})}{\cancel{4}2} = \frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$$

184

$$\frac{x+1}{2} - \frac{(x+1)^2}{4} = \frac{1}{3}x - 3$$

devo portare
l'equaz. in
forma NORMALE
 $ax^2 + bx + c = 0$

$$\frac{6(x+1) - 3(x+1)^2}{\cancel{12}} = \frac{4x - 36}{\cancel{12}}$$

$$6x + 6 - 3(x^2 + 2x + 1) - 4x + 36 = 0$$

$$\cancel{6}x + 6 - 3x^2 - \cancel{6}x - 3 - 4x + 36 = 0$$

$$-3x^2 - 4x + 39 = 0$$

$$3x^2 + 4x - 39 = 0$$

$$\Delta = 16 + 4 \cdot 3 \cdot 39 = 16 + 468 =$$

$$= 484 = 22^2$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{484}}{6} = \frac{-4 \pm 22}{6} = \begin{cases} -\frac{26}{6} = -\frac{13}{3} \\ \frac{18}{6} = 3 \end{cases}$$

$$x = -\frac{13}{3} \vee x = 3$$