1/12/2021

239 $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x^2-3x+2}-1$ $[1\pm\sqrt{3}]$

$(x-2)(x-1)$ C.E. $x\neq 2$ $x\neq 1$

$$\frac{x-2}{\cancel{(x-2)(x-1)}}=\frac{2-(x-2)(x-1)}{\cancel{(x-2)(x-1)}}$$

$$x-2=\cancel{2}-x^2+3x-\cancel{2}$$

$$x^2-2x-2=0 \qquad \Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-2)=$$

$$=4+8=12$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=\frac{\cancel{2}(1\pm\sqrt{3})}{\cancel{2}}=$$

$$=1\pm\sqrt{3} \qquad \boxed{x=1\pm\sqrt{3}}$$ DOPO CONTROLLO C.E.

236 $\frac{1}{x^2-x}+\frac{1}{x}=1$

C.E. $x \neq 0 \quad x \neq 1$

$x(x-1)$

$$\frac{\cancel{1}+x\cancel{-1}}{\cancel{x(x-1)}}=\frac{x(x-1)}{\cancel{x(x-1)}}$$

$$x=x^2-x$$

$$x^2-2x=0 \quad \text{(SPURIA)}$$

$$x(x-2)=0$$

$$x=0 \quad \vee \quad x-2=0$$

$$x=0 \quad \vee \quad x=2$$

N.Acc.
per C.E.

$$\boxed{x=2}$$

256 $\dfrac{1}{x^2-3x+2} - \dfrac{1}{6x^2+6x-12} = \dfrac{1}{x^2-2x+1}$ [−1; 10]

$(x-1)(x-2)$ $\quad 6(x^2+x-2)$ $\quad (x-1)^2$

$6(x+2)(x-1)$

C.E.

$x \neq \pm 2$

$x \neq 1$

$$\frac{6(x-1)(x+2)-(x-1)(x-2)}{\cancel{6(x-1)^2(x-2)(x+2)}} = \frac{6(x-2)(x+2)}{\cancel{6(x-1)^2(x-2)(x+2)}}$$

$$6(x^2+\overbrace{2x-x}^{+x}-2)-(x^2\overbrace{-2x-x}^{-3x}+2) = 6(x^2-4)$$

$$\cancel{6x^2}+6x-12-x^2+3x-2 = \cancel{6x^2}-24$$

$$-x^2+9x+10=0$$

$$x^2-9x-10=0 \qquad \Delta = 81+40 = 121$$

$$x = \frac{9\pm\sqrt{121}}{2} = \frac{9\pm 11}{2} = \begin{cases} \dfrac{9-11}{2} = -1 \\ \dfrac{9+11}{2} = 10 \end{cases}$$

$$\boxed{x=-1 \quad \vee \quad x=10}$$

DOPO CONTROLLO C.E.

<u>OSSERVAZIONE</u>

Arrivati a $x^2-9x-10=0$, è possibile anche procedere scomponendo e applicando la legge di annullamento del prodotto

$$(x-10)(x+1)=0$$

$$x-10=0 \quad \vee \quad x+1=0$$

$$\boxed{x=10 \quad \vee \quad x=-1}$$

278 $\dfrac{x+2}{x^4+x^2-2} - \dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{x^2+2}$ $\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

C.E.

$x \neq \pm 1$

$(x^2+2)(x^2-1)$ $(x-1)(x+1)$

$(x^2+2)(x-1)(x+1)$

$$\frac{x+2-(x^2+2)}{(x^2+2)\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+2)\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

$$x \cancel{+2} - x^2 \cancel{-2} = x^2 - 1$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac =$$
$$= 1 + 8 = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 & \text{N.A.} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

TEOREMA 3 | Scomposizione di un trinomio di secondo grado

Ogniqualvolta il trinomio $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, è tale che l'equazione associata, $ax^2 + bx + c = 0$, ammette due soluzioni reali x_1 e x_2 (cioè quando $\Delta \geq 0$), vale la scomposizione:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad [12]$$

Nel caso particolare in cui $\Delta = 0$, quindi $x_1 = x_2$, la formula [12] diventa:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

ESEMPIO

Scomporre $2x^2 - x - 1$

Trovo le due radici del trinomio, cioè le soluzioni dell'equazione associata:

$$2x^2 - x - 1 = 0 \qquad \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{cases} \qquad \boxed{x = -\frac{1}{2} \vee x = 1}$$

le soluzioni sono $-\frac{1}{2}$ e 1. Le chiamo x_1 e x_2, cioè

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 1$$

$$2x^2 - x - 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1) = (2x + 1)(x - 1)$$

517 $x^2 - 4x - 6$ da scomporre

$x^2 - 4x - 6 = 0$ $\quad\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) =$

$a = 1 \quad b = -4 \quad c = -6$ $\quad = 16 + 24 = 40$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{2} = \frac{\cancel{2}(2 \pm \sqrt{10})}{\cancel{2}} =$$

$= 2 \pm \sqrt{10}$ $\quad x_1 = 2 - \sqrt{10} \quad x_2 = 2 + \sqrt{10}$

$$x^2 - 4x - 6 = a(x - x_1)(x - x_2) = (x - 2 + \sqrt{10})(x - 2 - \sqrt{10})$$

coeff. $a = 1$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Delta \geq 0 \quad a \neq 0$$

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) =$$

$$= \cancel{a}\left(\frac{2ax + b + \sqrt{\Delta}}{2\cancel{a}}\right)\left(\frac{2ax + b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) =$$

$$= \frac{[(2ax + b) + \sqrt{\Delta}][(2ax + b) - \sqrt{\Delta}]}{4a} = \frac{(2ax + b)^2 - \Delta}{4a} =$$

$$= \frac{(2ax+b)^2 - \Delta}{4a} = \frac{4a^2x^2 + \cancel{b^2} + 4abx - \cancel{b^2} + 4ac}{4a} =$$

$$= \frac{\cancel{4a}(ax^2+bx+c)}{\cancel{4a}} = ax^2+bx+c \qquad \text{C.V.D.}$$

Che cosa accade se l'equazione associata al trinomio **non** ammette soluzioni reali, cioè se $\Delta < 0$? In questo caso il trinomio **non** può essere *riducibile* in **R**: infatti, se lo fosse, nella sua scomposizione comparirebbe un fattore del tipo $x - k$, quindi l'equazione associata avrebbe almeno una soluzione, k. Di conseguenza:

TEOREMA 4 | Riducibilità di un trinomio di secondo grado in R

Il trinomio $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, è riducibile in **R** se e solo se $b^2 - 4ac \geq 0$.

ESEMPIO CON $\Delta = 0$

1) $4x^2 - 4x + 1$ da scomporre

$4x^2 - 4x + 1 = 0 \qquad \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0 \qquad x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{8} = \frac{1}{2}$

$$4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 4\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2 = \cancel{4}\,\frac{(2x-1)^2}{\cancel{2^2}} = (2x-1)^2$$

2) $-x^2 - 6x - 9$ da scomporre

$\Delta = 36 - 36 = 0 \qquad x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{-2} = -3$

$$-x^2 - 6x - 9 = -(x+3)^2$$