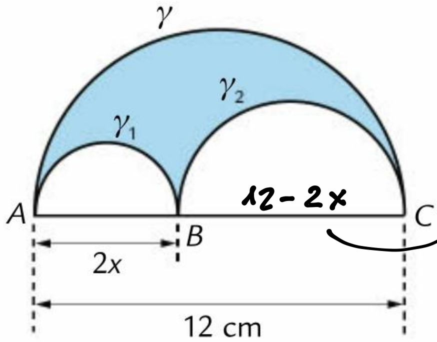
9/3/2022

594 In riferimento alla figura, determina la misura x (in cm) del raggio della semicirconferenza γ_1 in modo che l'area della regione colorata sia compresa tra 4π cm^2 e 8π cm^2 (esclusi gli estremi).



raggio $\gamma_2 =$
$= 6 - x$

$[3 - \sqrt{5} < x < 2 \vee 4 < x < 3 + \sqrt{5}]$

$\mathcal{A}_{CERCHIO} = r^2 \pi$

$\mathcal{A}_{SEMICERCHIO} = \dfrac{r^2 \pi}{2}$

$0 < 2x < 12$

$0 < x < 6$ C.E.

$$\mathcal{A}_{COLORATA} = \mathcal{A}_{SEM.AC} - \mathcal{A}_{SEM.AB} - \mathcal{A}_{SEM.BC}$$

$$\mathcal{A}_{SEM.AC} = \frac{6^2\pi}{2} = 18\pi \qquad \mathcal{A}_{SEM.AB} = \frac{x^2\pi}{2} \qquad \mathcal{A}_{SEM.BC} = \frac{(6-x)^2\pi}{2}$$

$$\mathcal{A}_{COLORATA} = 18\pi - \frac{x^2\pi}{2} - \frac{(6-x)^2\pi}{2} = \frac{36\pi - x^2\pi - (6-x)^2\pi}{2}$$

$$4\pi < \frac{36\pi - x^2\pi - (6-x)^2\pi}{2} < 8\pi$$

$$\begin{cases} 4\cancel{\pi} < \dfrac{36\cancel{\pi} - x^2\cancel{\pi} - (6-x)^2\cancel{\pi}}{2} \\ \\ \dfrac{36\cancel{\pi} - x^2\cancel{\pi} - (6-x)^2\cancel{\pi}}{2} < 8\cancel{\pi} \end{cases} \qquad \begin{cases} 36 - x^2 - (6-x)^2 > 8 \\ 0 < x < 6 \leftarrow \text{C.E.} \\ 36 - x^2 - (6-x)^2 < 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{36} - x^2 - \cancel{36} - x^2 + 12x - 8 > 0 \\ 0 < x < 6 \\ \cancel{36} - x^2 - \cancel{36} - x^2 + 12x - 16 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x^2 + 12x - 8 > 0 \\ 0 < x < 6 \\ -2x^2 + 12x - 16 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x^2+12x-8>0 \\ 0<x<6 \\ -2x^2+12x-16<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-6x+4<0 & (1) \\ 0<x<6 \\ x^2-6x+8>0 & (2) \end{cases}$$

(1) $x^2-6x+4<0$

$\frac{\Delta}{4}=9-4=5 \qquad x=3\pm\sqrt{5} \qquad 3-\sqrt{5}<x<3+\sqrt{5}$

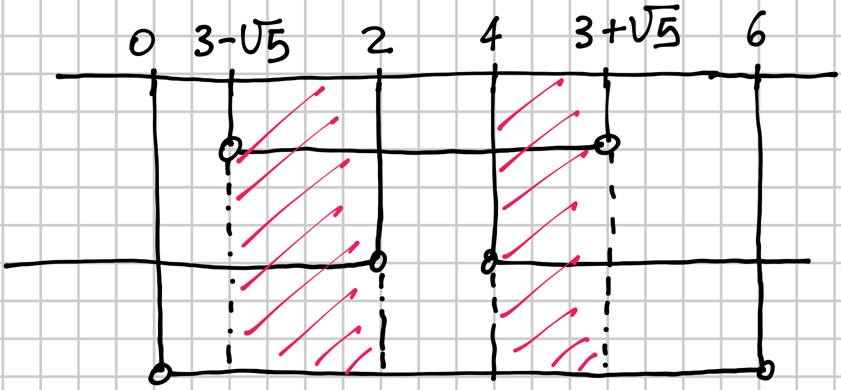
(2) $x^2-6x+8>0$

$\frac{\Delta}{4}=9-8=1 \qquad x=3\pm1=\begin{cases}4\\2\end{cases} \qquad x<2 \vee x>4$

(1) $3-\sqrt{5}<x<3+\sqrt{5}$

(2) $x<2 \vee x>4$

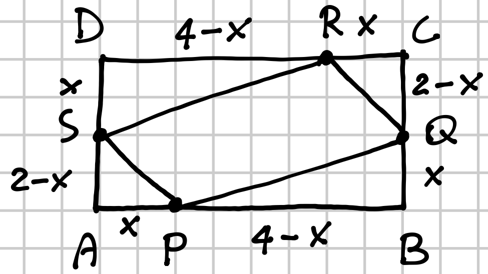
C.E. $0<x<6$



$$\boxed{3-\sqrt{5}<x<2 \quad \vee \quad 4<x<3+\sqrt{5}}$$

595 Considera un rettangolo $ABCD$, in cui $\overline{AB} = 4$ e $\overline{BC} = 2$. Sui lati AB, BC, CD e DA prendi, rispettivamente, i punti P, Q, R, S, tali che $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR} = \overline{DS} = x$. Giustifica perché il quadrilatero $PQRS$ è un parallelogramma e determina per quali valori di x la misura dell'area di tale parallelogramma è minore di 4.

$[1 < x < 2]$



$\overline{AB} = 4 \quad \overline{BC} = 2$

$0 < x < 2$

$DRS \cong PBQ$ e $APS \cong RCQ$ perché triangoli rettangoli con cateti a due a due congruenti

$\Downarrow$

$SR \cong PQ$ e $SP \cong RQ$

$\Downarrow$

$PQRS$ è un parallelogramma

$$\mathcal{A}_{PQRS} = \mathcal{A}_{ABCD} - 2\mathcal{A}_{APS} - 2\mathcal{A}_{PBQ} =$$

$$= 8 - \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} x(2-x) - \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} x(4-x) = 8 - 2x + x^2 - 4x + x^2 =$$

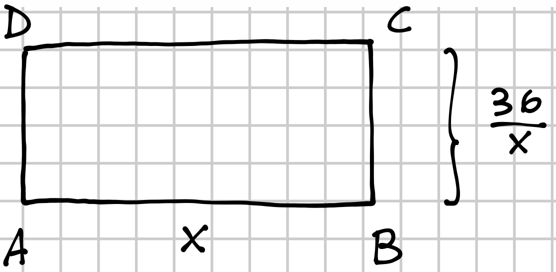
$$= 2x^2 - 6x + 8$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 6x + 8 < 4 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 - 6x + 4 < 0 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \qquad \frac{\Delta}{4} = 9 - 8 = 1$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 1 < x < 2 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{1 < x < 2}$$

596 Un rettangolo ha area uguale a 36 cm^2. Indicata con x la misura della base, determina in corrispondenza di quali valori di x il perimetro del rettangolo è minore o uguale a 40 cm. [$2 \leq x \leq 18$]



$x > 0$

$2x + 2 \cdot \frac{36}{x} \leq 40$

$\Downarrow$

$x + \frac{36}{x} \leq 20$

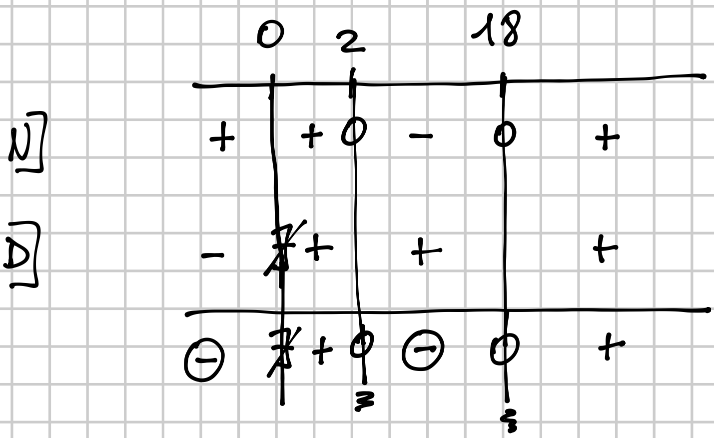
$\frac{x^2 - 20x + 36}{x} \leq 0$ (N], D])

N] $x^2 - 20x + 36 > 0$ $\qquad x < 2 \ \vee \ x > 18$

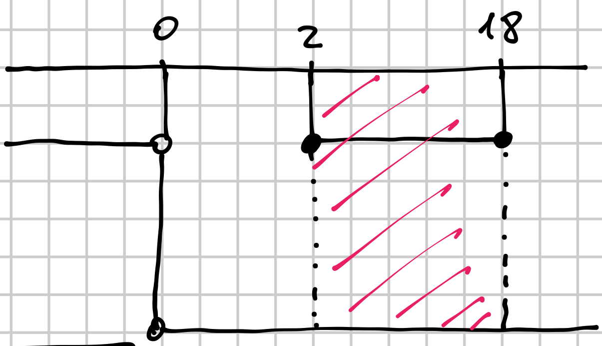
$\frac{\Delta}{4} = 100 - 36 = 64$

$x = 10 \pm 8 = \begin{cases} 2 \\ 18 \end{cases}$

D] $x > 0$

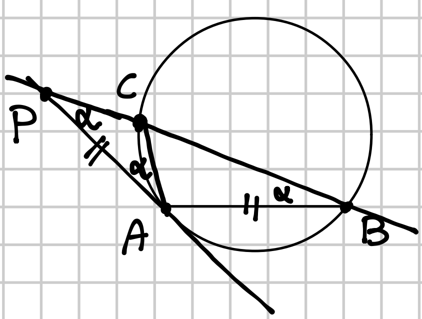


$\begin{cases} x < 0 \ \vee \ 2 \leq x \leq 18 \\ x > 0 \end{cases}$



$\boxed{2 \leq x \leq 18}$

159 Sia AB una corda di una circonferenza. Traccia la tangente in A alla circonferenza e considera su di essa un punto P tale che $AP \cong AB$. Chiama C il punto in cui la retta BP incontra ulteriormente la circonferenza e dimostra che $AC \cong PC$.
(*Suggerimento*: indica con α l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}P$ ed esprimi in funzione di α le ampiezze degli angoli dei triangoli ABP e ACP)

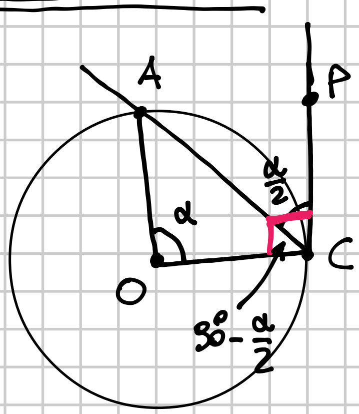


Indico con α l'angolo $A\hat{B}P$.
Allora $A\hat{P}B = A\hat{P}C = \alpha$ perché ABP è isoscele.

$C\hat{B}A$ e $C\hat{A}P$ sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AC, quindi $C\hat{B}A \cong C\hat{A}P = \alpha$

Dunque ACP è un triangolo isoscele e $AC \cong CP$ QED

OSSERVAZIONE



Dimostriamo che se $A\hat{O}C = \alpha$, allora l'angolo $A\hat{C}P$, con PC tangente alla circonferenza, è $\frac{\alpha}{2}$

AOC è isoscele perché AO e OC sono raggi, dunque $A\hat{C}O = O\hat{A}C = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$

Siccome PC è tangente, $OCP = 90°$ e $A\hat{C}O = 90° - \frac{\alpha}{2}$, allora $A\hat{C}P = \frac{\alpha}{2}$

$A\hat{C}P = \frac{\alpha}{2}$ come qualsiasi altro angolo alla circonferenza che insiste sull'arco AC.