PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Siano A, B due eventi. La probabilità di A condizionata a B è la probabilità che si verifichi A sapendo che si è verificato B.

Si indica con $p(A|B)$

ESEMPIO

Lancio di un dado regolare a 6 facce

A = "esce un numero dispari"

B = "esce un numero primo"

$p(A|B)$ = probabilità che si verifichi A sapendo che si è verificato B = la probabilità che sia uscito un numero dispari sapendo che è uscito un numero primo

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad \underbrace{p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}}_{\text{INCONDIZIONATA}}$

$p(A|B) = \frac{2}{3}$ perché le possibilità sono $\{2,3,5\}$ e i casi favorevoli $\{3,5\}$

$$p(A|B) = \frac{\overset{\text{CASI FAVOREVOLI}}{|A \cap B|}}{\underset{\text{CASI POSSIBILI}}{|B|}}$$

numero degli elementi di B

$A = \{1,3,5\}$ $\quad B = \{2,3,5\}$

$A \cap B = \{3,5\}$

$$p(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \implies p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B)$$

Analogamente

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \implies \boxed{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A)}$$

Due eventi si dicono INDIPENDENTI (STOCASTICAMENTE) se il verificarsi di uno non influisce sul verificarsi dell'altro, quindi

A e B sono indipendenti se e solo se $p(A|B) = p(A)$

(e di conseguenza $p(B|A) = p(B)$)

Nel caso di due eventi A e B INDIPENDENTI

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)}$$

156 Due tiratori, che colpiscono il bersaglio con probabilità rispettive 85% e 75%, sparano contemporaneamente a un bersaglio mobile. Qual è la probabilità che ha il bersaglio di sfuggire ai tiratori, se ciascuno di essi ha sparato solamente un colpo? $\left[\frac{3}{80} = 3{,}75\%\right]$

A = "il 1° tiratore colpisce il bersaglio"

B = "il 2° tiratore colpisce il bersaglio"

A e B sono INDIPENDENTI

$\bar{A}$ e $\bar{B}$ sono INDIPENDENTI

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B}) = \left(1 - \frac{85}{100}\right)\left(1 - \frac{75}{100}\right) =$$

$$= \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{20}{\cancel{100}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{25}}}{\underset{4}{\cancel{100}}} = \frac{3}{80} = 0{,}0375 = 3{,}75\,\%$$