31/3/2022

PROBABILITÁ CONDIZIONATA

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Due eventi A e B sono INDIPENDENTI se $p(A|B) = p(A)$

In questo caso si ha anche che $p(B|A) = p(B)$. Infatti

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \Rightarrow p(A \cap B) = p(A)\, p(B|A)$$

ma si ha anche $p(A \cap B) = p(B)\, p(A|B)$

e dunque $p(A)\, p(B|A) = p(B)\, p(A|B)$

ma per ipotesi $p(A|B) = p(A)$

quindi $p(A)\, p(B|A) = p(B) \cdot p(A)$, da cui, semplificando $P(A)$

si arriva a

$$p(B|A) = p(B).$$

Ricordiamo che se A e B sono INDIPENDENTI vale

$$p(A \cap B) = p(A)\, p(B)$$

135 Maria lancia una moneta e, se esce «testa», l'indomani si farà interrogare in Italiano, altrimenti si farà interrogare in Matematica. Maria stima che la probabilità di prendere più di 7 nell'interrogazione è $\frac{2}{3}$ in Italiano e $\frac{1}{3}$ in Matematica.

a. Qual è la probabilità che l'indomani Maria si faccia interrogare in Italiano e prenda più di 7?

b. Qual è la probabilità che l'indomani Maria si faccia interrogare in Matematica e prenda più di 7? $\left[a.\ \frac{1}{3};\ b.\ \frac{1}{6}\right]$

I_1 = "interrogazione in italiano" $\qquad$ I_2 = "interrogaz. in matematica"

$p(I_1) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $p(I_2) = \frac{1}{2}$

V_1 = "voto > 7 in italiano" $\qquad$ V_2 = "voto > 7 in matematica"

$p(V_1) = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $p(V_2) = \frac{1}{3}$

$p(I_1 \cap V_1) = p(I_1) \cdot p(V_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ $\qquad$ I_1 e V_1 indipendenti

$p(I_2 \cap V_2) = p(I_2) \cdot p(V_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ $\qquad$ I_2 e V_2 indipendenti

136 Il 5% delle lampadine prodotte in una fabbrica sono difettose. La probabilità che una lampadina difettosa venga scartata è del 90%. Scelta a caso una lampadina, qual è la probabilità che sia difettosa e non scartata? [0,5%]

E_1 = "lampadina difettosa" $\quad p(E_1) = 0,05$

E_2 = "lampadina scartata" $\quad p(E_2|E_1) = 0,9$

$\bar{E}_2$ = "lampadina non scartata" $\quad p(\bar{E}_2|E_1) = 1 - p(E_2|E_1)$

$= 1 - 0,9 = 0,1$

$$p(E_1 \cap \bar{E}_2) = p(E_1) \cdot p(\bar{E}_2|E_1) = 0,05 \cdot 0,1 = 0,005 = 0,5\%$$

157 Per una persona bloccata sotto una valanga la probabilità di sopravvivere dopo un'ora è del 15%. Una squadra di soccorso raggiunge il luogo dove due escursionisti sono coperti da una valanga caduta un'ora prima. Supponendo che la sopravvivenza di ciascun escursionista sia indipendente dalla sopravvivenza dell'altro, qual è la probabilità di trovare in vita:

a. entrambi gli escursionisti;

b. almeno uno degli escursionisti. $\left[\textbf{a. } \frac{9}{400}; \textbf{ b. } \frac{111}{400}\right]$

E_1 = "sopravvivenza del 1° escursionista" $\quad p(E_1) = 0{,}15$

E_2 = "sopravvivenza del 2° escursionista" $\quad p(E_2) = 0{,}15$

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)\,p(E_2) = 0{,}15 \cdot 0{,}15 = \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{\underset{4}{\cancel{20}}}{\cancel{100}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{100} = \frac{9}{400}$$

$\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$ = "entrambi escursionisti morti"

$$p(E_1 \cup E_2) = 1 - p(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2) = 1 - p(\bar{E}_1)\,p(\bar{E}_2) =$$

probabilità di trovare almeno uno dei due vivo ← evento contrario di $\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$

$$= 1 - 0{,}85 \cdot 0{,}85 =$$

$$= 1 - \frac{\overset{17}{\cancel{85}}}{\underset{20}{\cancel{100}}} \cdot \frac{\overset{17}{\cancel{85}}}{\underset{20}{\cancel{100}}} = 1 - \frac{289}{400} =$$

$$= \frac{400 - 289}{400} = \frac{111}{400}$$

ALTERNATIVAMENTE

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) = \frac{15}{100} + \frac{15}{100} - \frac{9}{400} =$$

$$= \frac{60 + 60 - 9}{400} = \frac{111}{400}$$