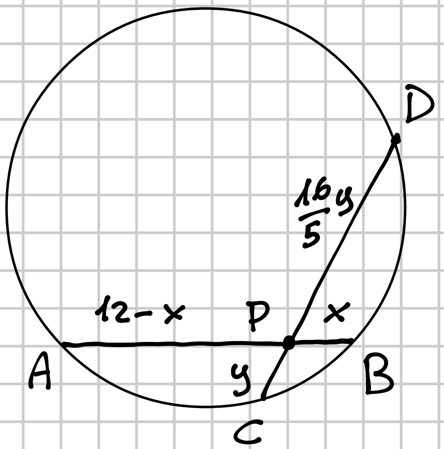
238 Siano *AB* e *CD* due corde di una circonferenza che si intersecano in *P*. La corda *AB* è lunga 12 cm ed è divisa da *P* in due parti tali che *PB* è $\frac{1}{5}$ di *AP*. La corda *CD* è divisa da *P* in due parti tali che *PD* è $\frac{16}{5}$ di *CP*. Determina le lunghezze dei quattro segmenti *AP*, *PB*, *CP* e *PD*. [$AP = 10$ cm, $PB = 2$ m, $CP = 2{,}5$ cm, $PD = 8$ cm]



$\overline{AB} = 12$

$\overline{PB} = \frac{1}{5}\overline{AP}$ $\qquad \overline{PB} = x$

$\overline{PD} = \frac{16}{5}\overline{CP}$ $\qquad \overline{PC} = y$

$0 < x < 12 \qquad y > 0$

non c'è ± perché x, y positivi

$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{PD} \cdot \overline{CP}$

$$\begin{cases} (12-x) \cdot x = \frac{16}{5} y \cdot y \\ x = \frac{1}{5}(12-x) \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x^2 = \frac{16}{5} y^2 \\ 5x = 12 - x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = \frac{16}{25} y^2 \Rightarrow x = \frac{4}{5} y \\ 6x = 12 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

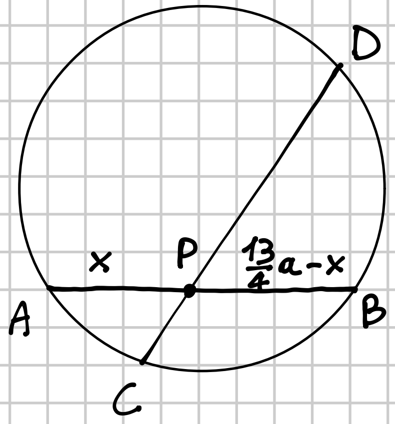
$\overline{PB} = \frac{1}{5}\overline{AP}$

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2 = \frac{4}{5} y \Rightarrow y = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$\overline{PC} = \frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{PC = 2{,}5 \text{ cm}}$ $\qquad \overline{PD} = \frac{16}{5} \cdot \frac{5}{2} = 8 \Rightarrow \boxed{PD = 8 \text{ cm}}$

$\overline{PB} = 2 \Rightarrow \boxed{PB = 2 \text{ cm}}$ $\qquad \overline{AP} = 12 - 2 = 10 \Rightarrow \boxed{AP = 10 \text{ cm}}$

245 In una circonferenza sono date due corde AB e CD, che si intersecano in P. Sapendo che $\overline{AB} = \frac{13}{4}a$, $\overline{CP} = \frac{1}{2}a$ e $\overline{PD} = \frac{9}{2}a$, determina le misure dei due segmenti in cui P divide AB. $\left[a; \frac{9}{4}a\right]$



$\overline{AB} = \frac{13}{4}a$ $\quad \overline{CP} = \frac{1}{2}a$

$\overline{PD} = \frac{9}{2}a$

$\overline{AP} = x \quad \overline{PB} = \frac{13}{4}a - x$

$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$

$0 < x < \frac{13}{4}a$

$x \cdot \left(\frac{13}{4}a - x\right) = \frac{9}{2}a \cdot \frac{1}{2}a$

$\frac{13}{4}ax - x^2 = \frac{9}{4}a^2$

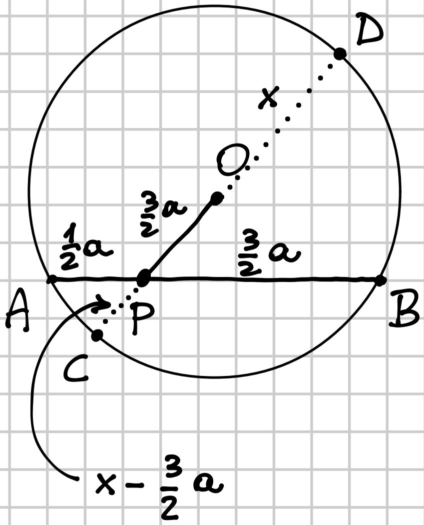
$13ax - 4x^2 - 9a^2 = 0$

$4x^2 - 13ax + 9a^2 = 0$ $\quad \Delta = (-13a)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9a^2 =$

$= 169a^2 - 144a^2 = 25a^2$

$x = \dfrac{13a \pm 5a}{8} = \begin{cases} \frac{8a}{8} = a \\ \frac{18a}{8} = \frac{9}{4}a \end{cases}$ accettabili entrambe perché entrambe $< \frac{13}{4}a$

243 In una circonferenza di centro O, una corda AB misura $2a$. Sia P il punto della corda AB tale che $AP \cong \frac{1}{4}AB$. Sapendo che $OP \cong \frac{3}{4}AB$, determina la misura del raggio della circonferenza. [$a\sqrt{3}$]



$\overline{AB} = 2a$

$\overline{AP} = \frac{1}{4}\overline{AB} =$

$= \frac{1}{4} \cdot 2a = \frac{1}{2}a$

$\overline{OP} = \frac{3}{4}\overline{AB} =$

$= \frac{3}{4} \cdot 2a = \frac{3}{2}a$

$\overline{PB} = 2a - \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$

$\overline{PD} \cdot \overline{PC} = \overline{AP} \cdot \overline{PB}$ $\qquad x > 0$

$$\left(x + \frac{3}{2}a\right)\left(x - \frac{3}{2}a\right) = \frac{1}{2}a \cdot \frac{3}{2}a$$

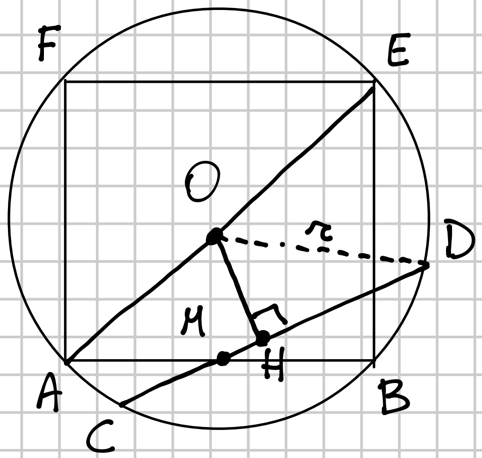
$$x^2 - \frac{9}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$x^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{9}{4}a^2$$

$$x^2 = \frac{12}{4}a^2 \qquad x^2 = 3a^2 \quad x > 0$$

$$\boxed{x = \sqrt{3}a}$$

248 In una circonferenza di centro O e raggio r considera una corda AB, di lunghezza uguale al lato di un quadrato inscritto nella circonferenza. Una corda CD, passante per il punto medio M di AB, è tale che $\overline{MD} = 2\overline{CM}$. Determina la distanza della corda CD dal centro O della circonferenza. $\left[\frac{r\sqrt{7}}{4}\right]$



$\overline{AE} = 2r$

$\overline{AB} = \overline{AE} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \cancel{2}r \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = r\sqrt{2}$

$\overline{AM} = r\frac{\sqrt{2}}{2} = \overline{MB}$

$\overline{CM} = x \qquad \overline{MD} = 2x$

$\overline{AM} \cdot \overline{MB} = \overline{CM} \cdot \overline{MD}$

$r\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r\frac{\sqrt{2}}{2} = x \cdot 2x$

$r^2 \cdot \frac{1}{2} = 2x^2$

$x^2 = \frac{r^2}{4} \qquad x = \frac{r}{2} \qquad \overline{CM} = \frac{r}{2}$

$\overline{MD} = r$

$\overline{CD} = \overline{CM} + \overline{MD} = \frac{r}{2} + r = \frac{3}{2}r$

$\overline{HD} = \frac{\overline{CD}}{2} = \frac{3}{4}r$

$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{HD}^2} = \sqrt{r^2 - \frac{9}{16}r^2} = \sqrt{\frac{7}{16}r^2} = \boxed{\frac{\sqrt{7}}{4}r}$