1/12/2021

IL CENTRO DI MASSA

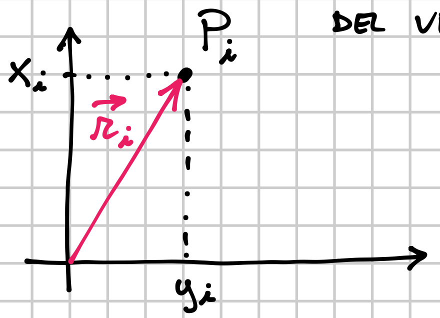
Dato un sistema di n punti materiali

$$P_1(\vec{r}_1, m_1),\ P_2(\vec{r}_2, m_2),\ \ldots,\ P_n(\vec{r}_n, m_n)$$

$\vec{r}_i$ = vettore posizione del punto P_i $\qquad \vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$

COMPONENTI CARTESIANE DEL VETTORE POSIZIONE

m_i = massa del punto P_i



CENTRO DI MASSA

ha vettore posizione

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

ESEMPIO

$P_1(1,3,5)$ $m_1 = 7$ kg

$P_2(-2,0,3)$ $m_2 = 10$ kg

$P_3(-1,-2,4)$ $m_3 = 6$ kg

sottinteso che le distanze siano in metri

Calcolare il centro di massa:

$$x_{CM} = \frac{1\cdot 7 - 2\cdot 10 - 1\cdot 6}{7+10+6} = -\frac{19}{23}$$

$$y_{CM} = \frac{3\cdot 7 + 0\cdot 10 - 2\cdot 6}{7+10+6} = \frac{9}{23}$$

$$z_{CM} = \frac{5\cdot 7 + 3\cdot 10 + 4\cdot 6}{7+10+6} = \frac{89}{23}$$

$$C_M\left(-\frac{19}{23}, \frac{9}{23}, \frac{89}{23}\right)$$

Si può dimostrare che:

massa totale (kg)

$$\vec{p}_{tot} = m_{tot}\vec{v}_{CM} \qquad [15]$$

quantità di moto totale (kg·m/s)

velocità del centro di massa (m/s)

Quindi, la quantità di moto totale $\vec{p}_{tot}$ è la quantità di moto che avrebbe un singolo punto materiale di massa uguale alla massa totale del sistema che si muovesse alla velocità del centro di massa.

se la forza esterna risultante su un sistema è nulla, e quindi la quantità di moto del sistema si conserva, il suo centro di massa compie un moto rettilineo uniforme.

$$\vec{P}_{TOT} = m_{TOT}\,\vec{v}_{CM}$$

ISTANTE t (INIZIALE) $\quad \vec{P}_{TOT}(t) = m_{TOT}\,\vec{v}_{CM}(t)$

ISTANTE $t+\Delta t$ (FINALE) $\quad \vec{P}_{TOT}(t+\Delta t) = m_{TOT}\,\vec{v}_{CM}(t+\Delta t)$

$$\Delta\vec{P}_{TOT} = \vec{P}_{TOT}(t+\Delta t) - \vec{P}_{TOT}(t) = m_{TOT}\left[\vec{v}_{CM}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)\right]$$

$$\frac{\Delta\vec{P}_{TOT}}{\Delta t} = m_{TOT}\,\frac{\vec{v}_{CM}(t+\Delta t) - \vec{v}_{CM}(t)}{\Delta t}$$

$\vec{a}_{CM}$ = accelerazione del centro di massa (se Δt piccolo)

TEOREMA DELL'IMPULSO

$$\frac{\Delta\vec{P}_{TOT}}{\Delta t} = m_{TOT}\,\vec{a}_{CM}$$

$$\frac{\vec{F}_{est}\cdot\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} = m_{TOT}\,\vec{a}_{CM}$$

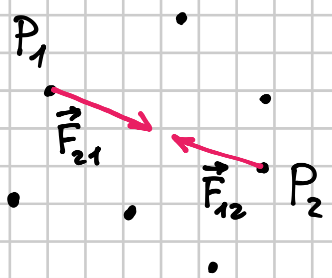
$$\boxed{\vec{F}_{est} = m_{TOT}\,\vec{a}_{CM}}$$

2° PRINCIPIO DELLA DINAMICA

↳ il moto del C_M è influenzato solo dalle forze esterne

OSSERVAZIONE = la somma delle forze interne è sempre nulla

$$\vec{F}_{TOT.} = \underbrace{\sum \vec{F}_{INT.}}_{=\vec{0}} + \sum \vec{F}_{EST.} = \sum \vec{F}_{EST.}$$



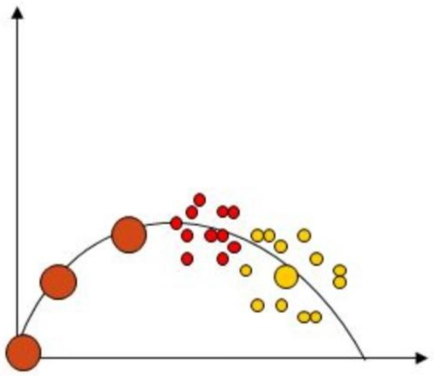
sistema di n punti.

FORZE INTERNE = forze fra gli elementi del sistema

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

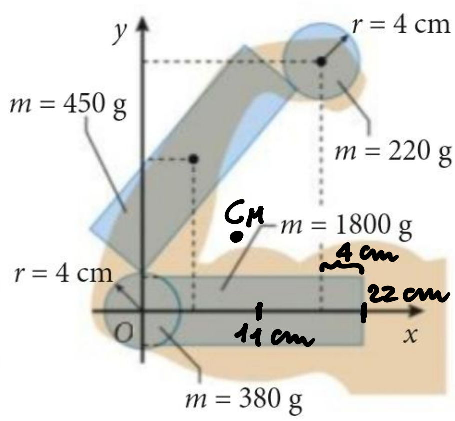
per il 3° pr. della dinamica (per tutte le forze interne)

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{INT.} = \vec{0}$$



Ad esempio, il moto del centro di massa di una palla di cannone che esplode a metà della sua traiettoria è sempre parabolico, anche dopo l'esplosione.

79 Nella foto a pagina seguente si vede il braccio di ~~un uomo.~~ DOSSENA Per trovare il centro di massa del braccio, possiamo schematizzarlo come mostrato nella figura, dove sono riportate anche le masse. Il baricentro della mano si trova nel punto (18 cm; 25 cm) e il baricentro dell'avambraccio è in (5,0 cm; 16,0 cm).



- Calcola le coordinate della posizione del centro di massa.
- È interno o esterno al braccio?

[9,1 cm, 4,5 cm; esterno]

$P_1(18, 25)$ $m_1 = 220\ g$

$P_2(5, 16)$ $m_2 = 450\ g$

$P_3(0, 0)$ $m_3 = 380\ g$

$P_4(11, 0)$ $m_4 = 1800\ g$

$$x_{CM} = \frac{18 \cdot 220 + 5 \cdot 450 + 0 \cdot 380 + 11 \cdot 1800}{220 + 450 + 380 + 1800}\ cm = 9{,}126\ldots\ cm \simeq \boxed{9{,}1\ cm}$$

$$y_{CM} = \frac{25 \cdot 220 + 16 \cdot 450 + 0 \cdot 380 + 0 \cdot 1800}{220 + 450 + 380 + 1800}\ cm = 4{,}4561\ldots\ cm \simeq \boxed{4{,}5\ cm}$$