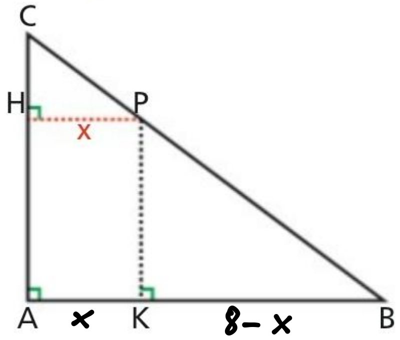
107 Nella figura, $\overline{CB} = 10$ e $\overline{AB} = 8$. Determina il valore di x per cui:

a. il perimetro del rettangolo $HAKP$ è minore del doppio del perimetro del triangolo PKB.

b. l'area di $HAKP$ è minore dell'area di PKB.

$\left[\text{a) } 0 \le x < \frac{72}{13}; \text{ b) } 0 \le x < \frac{8}{3}\right]$



25/9/2021

$\overline{AC} = \sqrt{10^2 - 8^2} =$

$= \sqrt{100 - 64} =$

$= \sqrt{36} = 6$

$0 < x < 8$

$2p_{HAKP} = 2x + 2\overline{PK} =$

$= 2x + \cancel{2} \cdot \frac{3(8-x)}{\cancel{4}\,2} =$

$= 2x + \frac{24-3x}{2}$

per similitudine dei triangoli ACB e KPB si ha:

$\overline{AC} : \overline{KP} = \overline{AB} : \overline{KB}$

$6 : \overline{KP} = 8 : (8-x)$

$\overline{KP} = \frac{\cancel{6}^{\,3}(8-x)}{\cancel{8}\,4} = \frac{3(8-x)}{4}$

$2p_{PKB} = \overline{PK} + \overline{KB} + \overline{PB} =$

$= \frac{24-3x}{4} + 8 - x + \frac{5(8-x)}{4}$

per similitudine:

$\overline{CB} : \overline{PB} = \overline{AB} : \overline{KB}$

$10 : \overline{PB} = 8 : (8-x)$

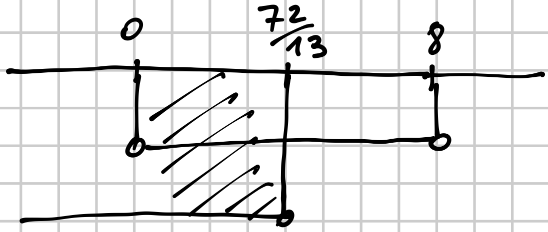
$\overline{PB} = \frac{10(8-x)}{8} = \frac{5(8-x)}{4}$

1)

$$\begin{cases} 2x + \frac{24-3x}{2} < 2\left(\frac{24-3x}{4} + 8 - x + \frac{5(8-x)}{4}\right) \\ 0 < x < 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + \cancel{24} - \cancel{3x} < \cancel{24} - \cancel{3x} + 32 - 4x + 40 - 5x \\ 0 < x < 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 13x < 72 \\ 0 < x < 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x < 72 \\ 0 < x < 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \dfrac{72}{13} \\ 0 < x < 8 \end{cases}$$



$$0 < x < \frac{72}{13}$$

2) $\mathcal{A}_{HAKP} < \mathcal{A}_{PKB}$

posso semplificare perché $8-x>0$

$$\begin{cases} x \cdot \dfrac{3\cancel{(8-x)}}{\cancel{4}} < \dfrac{1}{2}\cancel{(8-x)} \cdot \dfrac{3(8-x)}{\cancel{4}} \\ 0<x<8 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{3}x < \dfrac{\cancel{3}}{2}(8-x) \\ 0<x<8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x < 8-x \\ 0<x<8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x<8 \\ 0<x<8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \dfrac{8}{3} \\ 0<x<8 \end{cases} \qquad \boxed{0 < x < \frac{8}{3}}$$

112 Discuti la disequazione $(2a-3)x-a>a$ al variare del parametro a in $\mathbb{R}$.

a. Per quale valore di a le soluzioni della disequazione sono rappresentate da $x<\frac{1}{4}$?

b. Esiste un valore di a per cui la disequazione è verificata per qualsiasi valore di x?

c. Trova per quale valore di a la disequazione è equivalente a $|x+1|>\sqrt{x|x-1|}$.

$\left[\text{a)} = -\frac{1}{2};\ \text{b) no; c)} \nexists\, a \in \mathbb{R}\right]$

$(2a-3)x > 2a$

1) $2a-3=0 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$

$0 \cdot x > 3$

$0 > 3$

IMPOSSIBILE

2) $2a-3>0 \Rightarrow a>\frac{3}{2}$

$x > \frac{2a}{2a-3}$

3) $2a-3<0 \Rightarrow a<\frac{3}{2}$

$x < \frac{2a}{2a-3}$

IN DEFINITIVA

- $a=\frac{3}{2}$ IMPOSSIBILE
- $a>\frac{3}{2}$ $\quad x > \frac{2a}{2a-3}$
- $a<\frac{3}{2}$ $\quad x < \frac{2a}{2a-3}$

a) $x<\frac{1}{4}$ $\quad \begin{cases} a<\frac{3}{2} \\ \frac{2a}{2a-3}=\frac{1}{4} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a<\frac{3}{2} \\ 8a=2a-3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a<\frac{3}{2} \\ 6a=-3 \end{cases}$ $\quad \boxed{a=-\frac{1}{2}}$

b) NO. Infatti, dalla discussione sulle soluzioni non abbiamo trovato casi in cui per qualche valore di a l'insieme soluzione è $\mathbb{R}$ (se $a=\frac{3}{2}$ $S=\emptyset$; se $a\neq\frac{3}{2}$ $S\subset\mathbb{R}$ e $S\neq\mathbb{R}$)

$\boxed{c)}$ $(2a-3)x > 2a$ $\qquad$ $|x+1| > \sqrt{x|x-1|}$

Sono equivalenti se hanno lo stesso insieme soluzione

$\sqrt{x|x-1|} < |x+1|$

ATTENZIONE $\boxed{|a|^2 = a^2}$

$$\begin{cases} |x+1| > 0 \\ x|x-1| \geq 0 \\ x|x-1| < |x+1|^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq -1 \\ x \geq 0 \ \vee \ \overbrace{x = 1}^{\text{NON SERVE}} \Rightarrow x \geq 0 \\ x|x-1| < x^2+1+2x \end{cases} \Bigg\} \ x \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x|x-1| < x^2+1+2x \end{cases}$$

$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$

$x-1$: $-$ prima di 1, $+$ dopo 1

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 1 \\ -x(x-1) < x^2+1+2x \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \\ x(x-1) < x^2+1+2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ -x^2+x < x^2+1+2x \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 1 \\ \cancel{x^2} - x < \cancel{x^2}+1+2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ -2x^2-x-1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 1 \\ -3x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ 2x^2+x+1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 1 \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$\Delta = 1-8 = -7 < 0$

$$\begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \vee \quad x \geq 1$$

$0 \leq x < 1$

SOLUZ. DISEQ.

$\boxed{x \geq 0}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+$

Confronto con le soluzioni della dis. parametrica

- $a = \frac{3}{2}$ IMPOSSIBILE

- $a > \frac{3}{2}$ $x > \frac{2a}{2a-3}$

- $a < \frac{3}{2}$ $x < \frac{2a}{2a-3}$

$x \geq 0$

Le 2 disequazioni NON possono mai essere equivalenti (per nessun valore di a) dato che c'è l'uguaglianza larga!