27/9/2021

111 Data l'equazione

$$kx^2 - (2k+1)x + k = 0, \quad \text{con } k \in \mathbb{R},$$

trova per quali valori di k:

a. le soluzioni sono reali e distinte;

b. non ci sono soluzioni reali.

c. la differenza delle soluzioni è maggiore di 2;

d. il valore assoluto della somma delle soluzioni è minore del loro prodotto.

$\left[\text{a)} k > -\frac{1}{4}; \text{b)} k < -\frac{1}{4}\right.$

$\left.\text{c)} 0 < k < \frac{1+\sqrt{2}}{2}; \text{d)} \underbrace{\overset{\text{ERRATO}}{-1 < k < -\frac{1}{3}}}_{\text{sarebbe } \Delta < 0}\right]$

a) $\begin{cases} k \neq 0 & \text{per essere di 2° grado} \\ \Delta > 0 & \text{soluz. reali distinte} \end{cases}$

$\begin{cases} k \neq 0 \\ (2k+1)^2 - 4k^2 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} k \neq 0 \\ \cancel{4k^2} + 4k + 1 - \cancel{4k^2} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} k \neq 0 \\ k > -\frac{1}{4} \end{cases}$ oppure $-\frac{1}{4} < k < 0 \vee k > 0$

oppure $k > -\frac{1}{4} \wedge k \neq 0$

b) $\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ .... $\Rightarrow$ $k < -\frac{1}{4}$

c) $\Delta > 0$ $\qquad x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_2 - x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\cancel{-b}+\sqrt{\Delta}+\cancel{b}+\sqrt{\Delta}}{2a} =$$

$$= \frac{\cancel{2}\sqrt{\Delta}}{\cancel{2}a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

Richiesta equivale a $\frac{\sqrt{\Delta}}{a} > 2$

$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{\sqrt{\Delta}}{a} > 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -\frac{1}{4} < k < 0 \vee k > 0 \\ \frac{\sqrt{(2k+1)^2 - 4k^2}}{k} > 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} < k < 0 \quad \vee \quad k > 0 \\ \dfrac{\sqrt{(2k+1)^2 - 4k^2}}{k} > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} < k < 0 \\ \sqrt{(2k+1)^2 - 4k^2} < 2k \end{cases}$$

IMPOSSIBILE! $\emptyset$ → perché la radice al 1° membro non può essere < 0

INVERTO LA DISUGUAGLIANZA perché moltiplico per $k < 0$

$$\vee \begin{cases} k > 0 \\ \sqrt{(2k+1)^2 - 4k^2} > 2k \end{cases}$$

NON INVERTO perché moltiplico per $k > 0$

dato che $k > 0$ entrambi i membri esistono e sono positivi

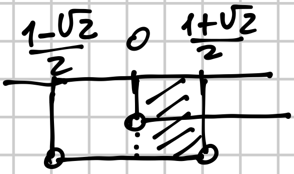
$$\begin{cases} k > 0 \\ (2k+1)^2 - 4k^2 > 4k^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k > 0 \\ \cancel{4k^2} + 1 + 4k - \cancel{4k^2} - 4k^2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k > 0 \\ 4k^2 - 4k - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4 + 4 = 8$$

$$k = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{\cancel{2}(1 \pm \sqrt{2})}{\cancel{4}\,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} k > 0 \\ \dfrac{1 - \sqrt{2}}{2} < k < \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



$$\Downarrow$$

$$\boxed{0 < k < \frac{1 + \sqrt{2}}{2}}$$

d) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $\qquad$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a} = -\frac{b}{a}$$

$$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac}{4a^2} = \frac{\cancel{4a}c}{\cancel{4a^2}} = \frac{c}{a}$$

$$|x_1 + x_2| < x_1 \cdot x_2$$

$$\left|-\frac{b}{a}\right| < \frac{c}{a} \qquad \left|\frac{b}{a}\right| < \frac{c}{a}$$

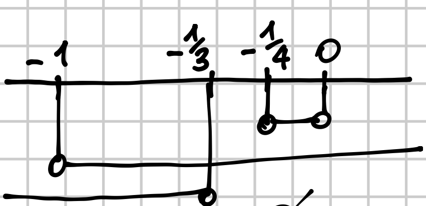
$$\begin{cases} \left|\frac{\overbrace{-(2k+1)}^{b}}{k}\right| < \frac{k}{k} \\ \Delta > 0 \end{cases} \qquad \left|\frac{2k+1}{k}\right| < 1$$

$$-1 < \frac{2k+1}{k} < 1$$

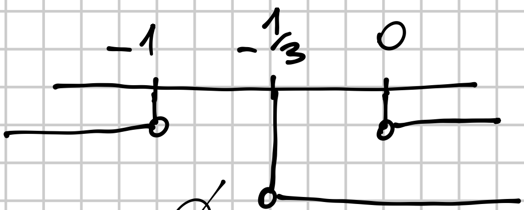
$$\begin{cases} \frac{2k+1}{k} < 1 \\ \frac{2k+1}{k} > -1 \\ -\frac{1}{4} < k < 0 \ \vee \ k > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} < k < 0 \\ 2k+1 > k \\ 2k+1 < -k \end{cases} \vee \begin{cases} k > 0 \\ 2k+1 < k \\ 2k+1 > -k \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} < k < 0 \\ k > -1 \\ k < -\frac{1}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} k > 0 \\ k < -1 \\ k > -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} < K < 0 \\ K > -1 \\ K < -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} K > 0 \\ K < -1 \\ K > -\frac{1}{3} \end{cases}$$



$\emptyset$



$\emptyset$

IMPOSSIBILE

FUNZIONI
pg. 83 DEL LIBRO

Per indicare una funzione si utilizza la notazione

$$f : A \to B$$

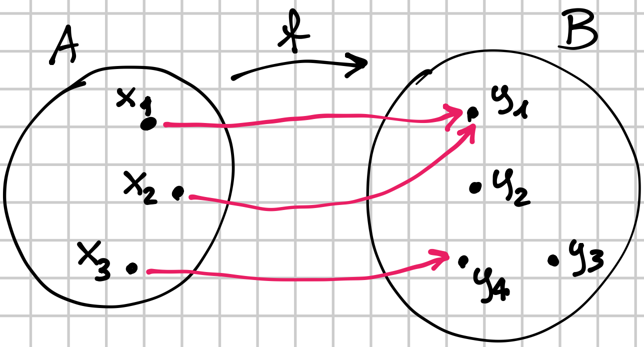
A, B insiemi NON VUOTI

EFFE DA A A B
oppure
EFFE DA A IN B

NOME DELLA FUNZIONE (f)

DOMINIO DELLA FUNZIONE (A)

CODOMINIO (B)



SI SCRIVE

$f(x_1) = y_1$

y_1 è l'IMMAGINE di x_1 tramite f

$f(x_2) = y_1$

$f(x_3) = y_4$

$f(x_2)$ è un altro nome di y_1. Significa che $f(x_2)$ è l'immagine di x_2

Un altro modo di scrivere è $\quad x_1 \mapsto y_1 \quad x_3 \mapsto y_4$

$x_2 \mapsto y_1$

Sarebbe corretto scrivere anche

$x_1 \mapsto f(x_1)$

$x_2 \mapsto f(x_2)$

$x_3 \mapsto f(x_3)$

Notare che in questo caso si ha che $f(x_1) = f(x_2)$

Spesso per considerare una funzione si dà una legge matematica

ESEMPI i 2 insiemi A e B vanno **SEMPRE** indicati, **NON SOLO** la legge!

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$

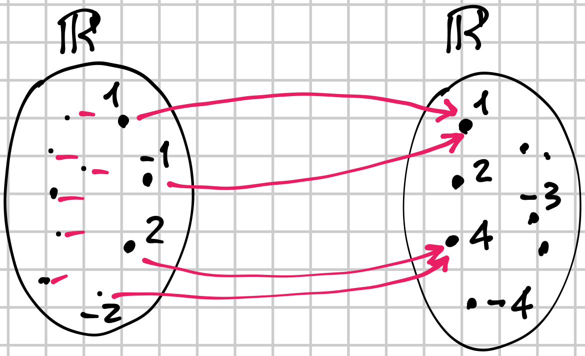
In questo caso $A = B$

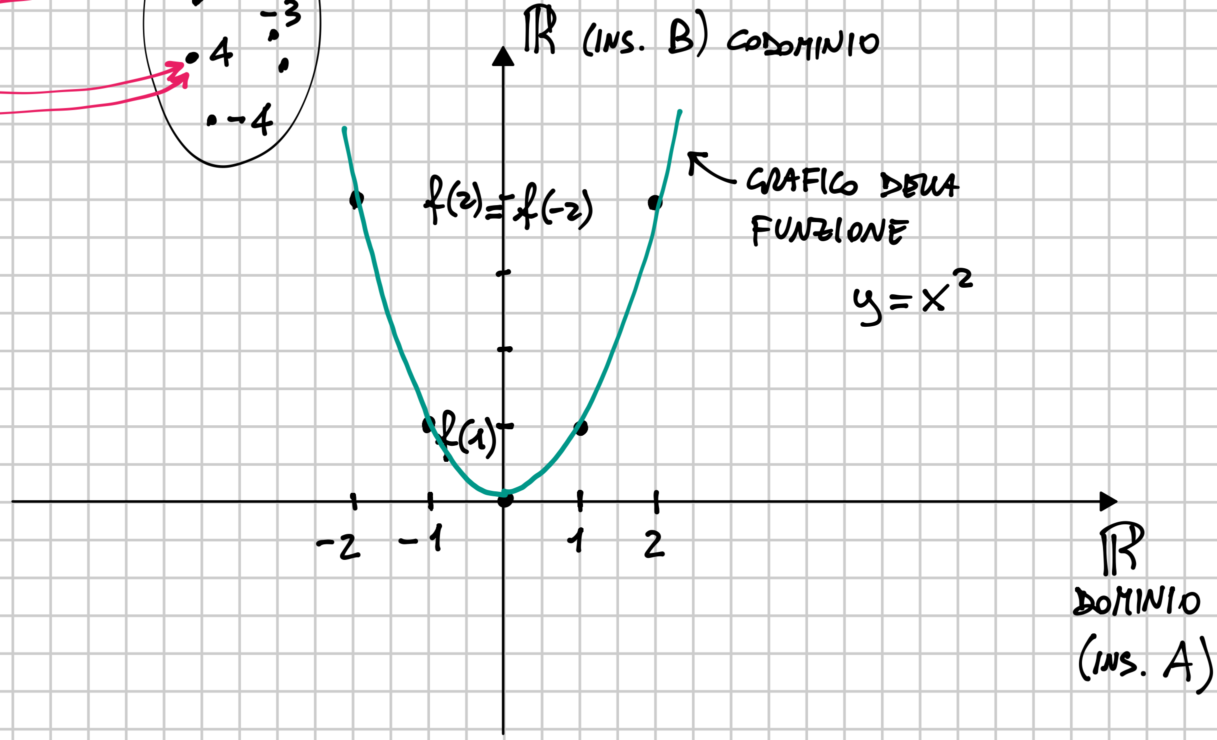
$f(2) = 2^2 = 4$

$f(-2) = (-2)^2 = 4$

$f(2) = f(-2)$

$f(1) = 1 \quad f(0) = 0 \quad f(3) = 9 \quad .....$





4 è immagine di 2 $\qquad$ 2 e −2 sono CONTROIMMAGINI di 4

4 è immagine di −2

−1 è immagine di qualche elemento? NO, perché −1 è negativo

Quindi −1 NON ha controimmagini (non essendo immagine di alcun elemento di A)