15/10/2021

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sono insiemi NUMERABILI, cioè possono essere messi in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$ (ovvero esiste una funzione biettiva da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$ (banalmente), da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ e da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$).

In pratica gli elementi di $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ possono essere "messi in fila".

$\mathbb{R}$ NON è numerabile. Non esiste alcuna funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ che sia biettiva.

DIMOSTRAZIONE

Supponiamo che esista una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{N}$ ed $\mathbb{R}$. Allora gli elementi di $\mathbb{R}$ possono essere messi in fila, cioè elencati.
I numeri irrazionali hanno uno sviluppo decimale infinito e non periodico:

0,35118745103 .....
0,77869313225 .....
0,62351869190 .....
0,50162317718 .....
0,64341523499 .....
⋮

0,37361 .....

$\Downarrow$ CAMBIO IL NUMERO COSÌ

$\boxed{0,48472\ .....}$ e così via (se incontro 9 scrivo 0, ecc....)

questo numero è nell'elenco? NO, perché differisce da ogni numero dell'elenco per almeno una cifra.

Quindi, l'elenco è comunque incompleto!

Ciò significa che non è possibile in nessun modo "mettere in fila" tutti i numeri reali (ogni elenco si rivelerebbe incompleto)

$\mathbb{R}$ è un insieme infinito NON NUMERABILE.

Si dice che $\mathbb{R}$ ha la cardinalità del CONTINUO.

$\mathbb{R}$ ha dunque un tipo di infinità superiore a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

Nell'impostazione che adottiamo qui a scuola $\mathbb{R}$ è in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta.