21/10/2021

236 Considera la funzione $f(x) = \sqrt{x+1}$, dimostra che è invertibile e poi risolvi l'equazione $f^{-1}(x) = f(8)$.

$[x = 2]$

$f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x+1}$

Devo dim. che è iniettiva

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1+1} = \sqrt{x_2+1} \Rightarrow x_1 + \cancel{1} = x_2 + \cancel{1}$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ OK è iniettiva

$y = \sqrt{x+1} \qquad y^2 = x+1 \qquad x = y^2 - 1 \longrightarrow y = x^2 - 1$

$f^{-1}(x) = x^2 - 1$

$f^{-1} : \underbrace{[0, +\infty)}_{im(f)} \to [-1, +\infty)$

$f^{-1}(x) = f(8)$

$x^2 - 1 = \sqrt{8+1} \qquad x^2 - 1 = 3 \qquad x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

(−2 NON è accettabile perché non è nel dominio di f^{-1})

237 Data l'uguaglianza $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$, ricava y in funzione di x. Dimostra che ottieni una funzione invertibile e trova la funzione inversa. $\left[y=\frac{2x}{x-2}\right]$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2} \qquad \begin{matrix} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x} \qquad \frac{1}{y}=\frac{x-2}{2x} \xrightarrow{\text{prendo i reciproci}} \qquad y=\frac{2x}{x-2}$$

lasciando perdere la condizione $\begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{cases}$, consideriamo la funzione

$$f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R} \qquad f(x)=\frac{2x}{x-2}$$

Dim. che è iniettiva

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1}{x_1-2}=\frac{2x_2}{x_2-2} \Rightarrow \frac{x_1}{x_1-2}=\frac{x_2}{x_2-2}$$

$$\overset{\text{prendo i reciproci}}{\Rightarrow} \frac{x_1-2}{x_1}=\frac{x_2-2}{x_2} \Rightarrow \frac{x_1}{x_1}-\frac{2}{x_1}=\frac{x_2}{x_2}-\frac{2}{x_2}$$

$$\Rightarrow \cancel{1}-\frac{2}{x_1}=\cancel{1}-\frac{2}{x_2} \Rightarrow -\frac{2}{x_1}=-\frac{2}{x_2} \Rightarrow x_1=x_2$$

$$y=\frac{2x}{x-2} \qquad y(x-2)=2x \qquad xy-2y=2x$$

$$xy-2x=2y \qquad x(y-2)=2y \qquad x=\frac{2y}{y-2}$$

$$\downarrow$$

$$y=\frac{2x}{x-2}$$

Questa funzione è l'inversa di sé stessa

LEGGI IL GRAFICO

242 Completa analizzando il grafico della funzione $f(x)$.

a. $f(-2) = $ 0

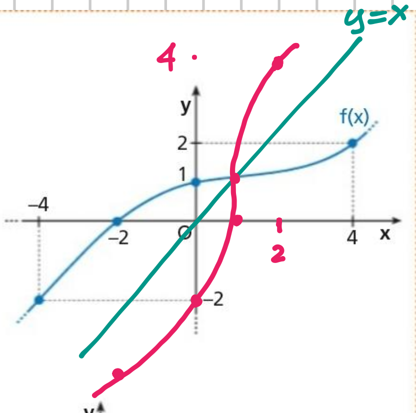
b. $f^{-1}(2) = $ 4

c. $f^{-1}(1) = $ 0

d. $f^{-1}(0) = $ −2

e. $f(4) = $ 2

Disegna il grafico della funzione inversa.



243 Considera la funzione f rappresentata dal grafico della figura.

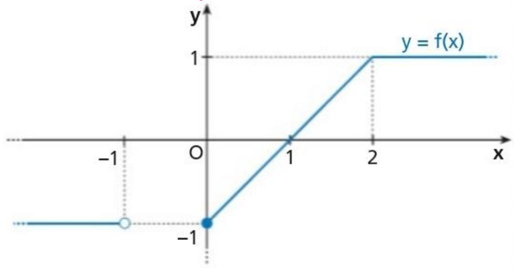
a. Trova il dominio e l'insieme immagine di f;

b. indica se f è iniettiva, biiettiva, invertibile;

c. trova $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ e completa $f(-2) = -1$, $f(10) = 1$, $f(1) = 0$;

d. l'espressione analitica della funzione è la seguente? NO

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{se } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$



[a) $D: x < -1 \vee x \geq 0$; $Im(f): -1 \leq y \leq 1$; c) $-1, \nexists f(-1), -1, 0, 1$; d) no]

a) $D = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ $\quad$ $im(f) = [-1, 1]$

b) NON INIETTIVA (dunque non invertibile)

Ci sono elementi distinti con la stessa immagine (ad es. $f(2) = f(3)$)

$f(-2) = -1$ $\quad$ $f(-1)$ NON ESISTE $\quad$ $f(0) = -1$ $\quad$ $f(1) = 0$ $\quad$ $f(2) = 1$

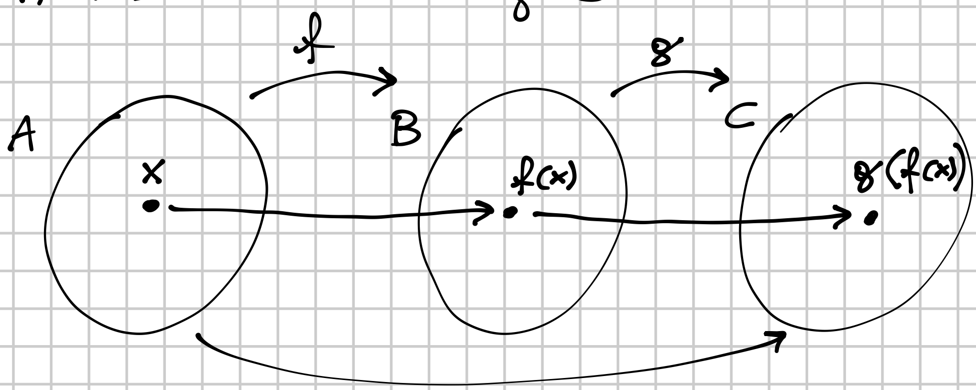
d)

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -1 \\ x - 1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

si può mettere anche ≤

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

$f: A \to B$ $\qquad\qquad$ $g: B \to C$



$g \circ f$ $\quad$ g COMPOSTO f oppure g "DOPO" f

$$g \circ f : A \longrightarrow C$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ESEMPI

1) $f(x) = 3x$ $\qquad\qquad$ $g(x) = x + 5$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad\qquad$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+5) = 3 \cdot (x+5) =$

$$= 3x + 15$$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x) = 3x + 5$

$$g \circ f \neq f \circ g$$

$\circ$ = COMPOSIZIONE È UN'OPERAZIONE NON COMMUTATIVA

2) $f(x) = \sqrt{x-1}$ $\qquad g(x) = 2x+1$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = \sqrt{2x+1-1} = \sqrt{2x}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = 2\sqrt{x-1} + 1$$

Per semplicità supponiamo che i domini di partenza siano quelli giusti per permettere la composizione

COMPORRE

285 $f(x) = \sqrt{x}$; $\qquad g(x) = x^2 - 1.$ $\qquad [(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1}; (g \circ f)(x) = x - 1]$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2-1) = \sqrt{x^2-1}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$$