26/10/2021

284 $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = x^2 + 1$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+1) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1$$

294 Sono date le funzioni: $f\colon x \mapsto \dfrac{3}{x-5}$, $g\colon x \mapsto x + 2$.

a. Determina $f \circ g$, $g \circ f$. **b.** Risolvi la disequazione $(g \circ f)(x) \geq g(f(-x))$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = \frac{3}{x+2-5} = \frac{3}{x-3}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{3}{x-5}\right) = \frac{3}{x-5} + 2 = \frac{3+2x-10}{x-5} = \frac{2x-7}{x-5}$$

$$(g \circ f)(x) \geq g(f(-x))$$

$$\frac{2x-7}{x-5} \geq \frac{-2x-7}{-x-5} \qquad \frac{2x-7}{x-5} \geq \frac{2x+7}{x+5}$$

$$\frac{2x-7}{x-5} - \frac{2x+7}{x+5} \geq 0 \qquad \frac{(x+5)(2x-7)-(2x+7)(x-5)}{(x-5)(x+5)} \geq 0$$

$$\frac{\cancel{2x^2} - 7x + 10x - \cancel{35} - \cancel{2x^2} + 10x - 7x + \cancel{35}}{(x-5)(x+5)} \geq 0$$

$$\frac{\cancel{6}x}{(x-5)(x+5)} \geq 0$$

$x > 0$

$x > 5$

$x > -5$

		-5		0		5	
$x>0$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x>5$	$-$		$-$		$-$	$\nexists$	$+$
$x>-5$	$-$	$\nexists$	$+$		$+$		$+$
	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

$$\boxed{-5 < x \leq 0 \quad \vee \quad x > 5}$$

295 Considera le funzioni $f(x) = 1 + 4x$ e $g(x) = x^2 - k$.
Determina per quale valore di k il grafico di $(f \circ g)(x)$ passa per $(0; 3)$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - K) = 1 + 4(x^2 - K) = 1 + 4x^2 - 4K$$

grafico $\rightsquigarrow$ $y = 4x^2 + 1 - 4K$ $\quad P(0,3)$

$$3 = 4 \cdot 0^2 + 1 - 4K$$

$$4K = -2 \qquad \boxed{K = -\frac{1}{2}}$$

299 È assegnata la funzione $f(x) = \dfrac{2}{x-1} + 1$:

a. trova il dominio e l'insieme immagine di f;
b. dimostra che f è invertibile e trova f^{-1} verificando che $f^{-1} = f$;
c. trova $f(2)$ e le controimmagini di 3 e -6;
d. calcola $(f \circ f)(x)$ e risolvi la disequazione $(f \circ f)(x) + f(2x) > 1$.

$\left[\text{a) } D = \mathbb{R} - \{1\}, Im(f) = \mathbb{R} - \{1\}; \text{ c) } 3, 2, \frac{5}{7}; \text{ d) } (f \circ f)(x) = x; x > \frac{1}{2}\right]$

a) DOMINIO $\quad x \neq 1 \qquad D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Devo trovare ora l'insieme immagine, cioè l' "insieme degli y".

$$y = \frac{2}{x-1} + 1$$

Mi chiedo: dato un $y \in \mathbb{R}$ (codominio), questo y deriva da un qualche x? Riesco a risalire a una x tale che $f(x) = y$?

Dato y, cerco di ricavare la x $\quad \begin{cases} y = \frac{2}{x-1} + 1 \Rightarrow y - 1 = \frac{2}{x-1} \\ x \neq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = \frac{2}{y-1} \\ x \neq 1 \\ y \neq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{2}{y-1} + 1 \\ x \neq 1 \\ y \neq 1 \end{cases}$

la x riesco a trovarla se $y \neq 1$

$\Rightarrow im(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) f è iniettiva

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{2}{x_1-1}+\cancel{1}=\frac{2}{x_2-1}+\cancel{1} \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1=x_2$$

è iniettiva
quindi invertibile

$$y=\frac{2}{x-1}+1 \qquad y-1=\frac{2}{x-1} \qquad x-1=\frac{2}{y-1} \qquad x=\frac{2}{y-1}+1$$

$$\Downarrow$$

$$y=\frac{2}{x-1}+1$$

$$f^{-1}(x)=\frac{2}{x-1}+1 \qquad f^{-1}: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

c) $f(2)=\frac{2}{2-1}+1=2+1=3$

CONTROIMMAGINI:

$$\frac{2}{x-1}+1=3 \Rightarrow \frac{2}{x-1}=2 \Rightarrow x=2 \quad \boxed{=f^{-1}(3)}$$

dato che f^{-1} è l'inversa

$$\frac{2}{x-1}+1=-6 \Rightarrow \frac{2}{x-1}=-7 \Rightarrow x-1=-\frac{2}{7} \Rightarrow x=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7} \quad \boxed{=f^{-1}(-6)}$$

d) $$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{2}{x-1}+1\right)=\frac{2}{\left(\frac{2}{x-1}+1\right)-1}+1=x$$

infatti $f=f^{-1}$, quindi $f\circ f=id$

FUNZIONE IDENTICA $id: x \mapsto x$

$$(f\circ f)(x)+f(2x)>1$$

$$x+\frac{2}{2x-1}+1>1 \Rightarrow \frac{2x^2-x+2}{2x-1}>0$$

$$\frac{2x^2 - x + 2}{2x - 1} > 0$$

$2x^2 - x + 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R}$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -15 < 0$

$2x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{1}{2}$

	$\frac{1}{2}$	
$+$		$+$
$-$		$+$
$-$		$+$

$$\boxed{x > \frac{1}{2}}$$