

284

$$f(x) = \frac{1}{x};$$

$$g(x) = x^2 + 1.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1$$

294

Sono date le funzioni: $f: x \mapsto \frac{3}{x-5}$, $g: x \mapsto x+2$.

- a. Determina $f \circ g, g \circ f$. b. Risovi la disequazione $(g \circ f)(x) \geq g(f(-x))$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = \frac{3}{x+2-5} = \frac{3}{x-3}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{3}{x-5}\right) = \frac{3}{x-5} + 2 = \frac{3+2x-10}{x-5} = \frac{2x-7}{x-5}$$

$$(g \circ f)(x) \geq g(f(-x))$$

$$\frac{2x-7}{x-5} \geq \frac{-2x-7}{-x-5}$$

$$\frac{2x-7}{x-5} \geq \frac{2x+7}{x+5}$$

$$\frac{2x-7}{x-5} - \frac{2x+7}{x+5} \geq 0 \quad \frac{(x+5)(2x-7) - (2x+7)(x-5)}{(x-5)(x+5)} \geq 0$$

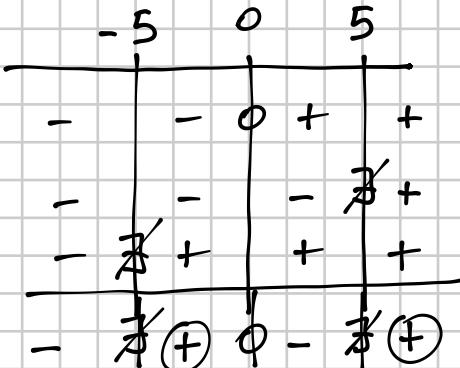
$$\frac{2x^2-7x+10x-35 - 2x^2+10x-7x+35}{(x-5)(x+5)} \geq 0$$

$$\frac{6x}{(x-5)(x+5)} \geq 0$$

$$x > 0$$

$$x > 5$$

$$x > -5$$



$$-5 < x \leq 0 \quad V \quad x > 5$$

295

Considera le funzioni $f(x) = 1 + 4x$ e $g(x) = x^2 - k$.

Determina per quale valore di k il grafico di $(f \circ g)(x)$ passa per $(0; 3)$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - k) = 1 + 4(x^2 - k) = 1 + 4x^2 - 4k$$

grafico $\rightsquigarrow y = 4x^2 + 1 - 4k$ $P(0, 3)$

$$3 = 4 \cdot 0^2 + 1 - 4k$$

$$4k = -2 \quad \boxed{k = -\frac{1}{2}}$$

299

È assegnata la funzione $f(x) = \frac{2}{x-1} + 1$:

- a. trova il dominio e l'insieme immagine di f ;
- b. dimostra che f è invertibile e trova f^{-1} verificando che $f^{-1} = f$;
- c. trova $f(2)$ e le controimmagini di 3 e -6;
- d. calcola $(f \circ f)(x)$ e risovi la disequazione $(f \circ f)(x) + f(2x) > 1$.

[a) $D = \mathbb{R} - \{1\}$, $Im(f) = \mathbb{R} - \{1\}$; c) $3, 2, \frac{5}{7}$; d) $(f \circ f)(x) = x$; $x > \frac{1}{2}$]

e) DOMINIO $x \neq 1$ $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Dato trovare ora l'insieme immagine, cioè l'"insieme degli y ".

$$y = \frac{2}{x-1} + 1$$

Mi chiede: dato un $y \in \mathbb{R}$ (codominio), questo y deriva da un qualche x ? Riesco a risalire a una x tale che $f(x) = y$?

Dato y , cerco di trovare lo x $\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{2}{x-1} + 1 \Rightarrow y-1 = \frac{2}{x-1} \\ x \neq 1 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-1 = \frac{2}{y-1} \\ x \neq 1 \\ y \neq 1 \end{array} \right.$$

la x riesco a trovarla se $y \neq 1$
 $\Rightarrow im(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) f è iniettiva

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2}{x_1-1} + 1 = \frac{2}{x_2-1} + 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1 = x_2$$

è iniettiva
quindi invertibile

$$y = \frac{2}{x-1} + 1 \quad y - 1 = \frac{2}{x-1} \quad x - 1 = \frac{2}{y-1} \quad x = \frac{2}{y-1} + 1$$

↓

$$y = \frac{2}{x-1} + 1$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2}{x-1} + 1 \quad f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

c) $f(2) = \frac{2}{2-1} + 1 = 2 + 1 = 3$

connoimmagini:

$$\frac{2}{x-1} + 1 = 3 \Rightarrow \frac{2}{x-1} = 2 \Rightarrow x = 2$$

$$= f^{-1}(3)$$

dato che f è l'inversa

$$= f^{-1}(-6)$$

$$\frac{2}{x-1} + 1 = -6 \Rightarrow \frac{2}{x-1} = -7 \Rightarrow x-1 = -\frac{2}{7} \Rightarrow x = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

$$(d) (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{2}{x-1} + 1\right) = \frac{2}{\left(\frac{2}{x-1} + 1\right) - 1} + 1 = x$$

infatti $f = f^{-1}$, quindi $f \circ f = id$
 \uparrow
FUNZIONE IDENTICA $id: x \mapsto x$

$$(f \circ f)(x) + f(2x) > 1$$

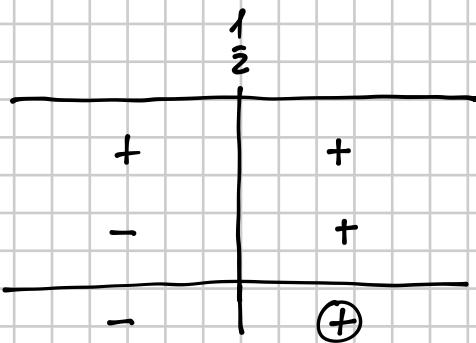
$$x + \frac{2}{2x-1} + 1 > 1 \Rightarrow \frac{2x^2 - x + 2}{2x-1} > 0$$

$$\frac{2x^2 - x + 2}{2x - 1} > 0$$

$$2x^2 - x + 2 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -15 < 0$$

$$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$



$$x > \frac{1}{2}$$