8/11/2021

388 $y = -x^2 + 6|x|$; DISEGNARE IL GRAFICO

$$f(x) = -|x|^2 + 6|x| \longleftarrow -x^2 + 6x \longleftarrow x^2 - 6x =$$

$$= x^2 - 6x + 9 - 9$$

$$= (x-3)^2 - 9$$

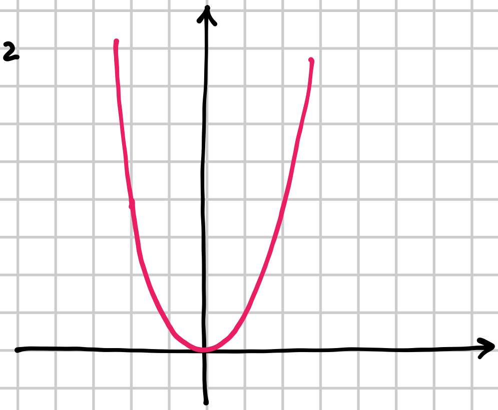
$$\uparrow$$

$$(x-3)^2$$

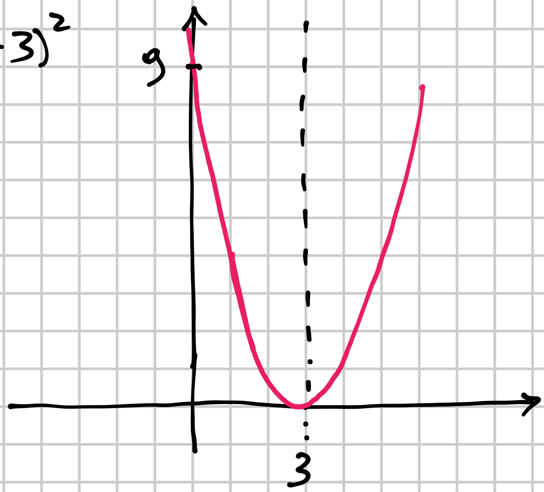
$$\uparrow$$

$$x^2$$

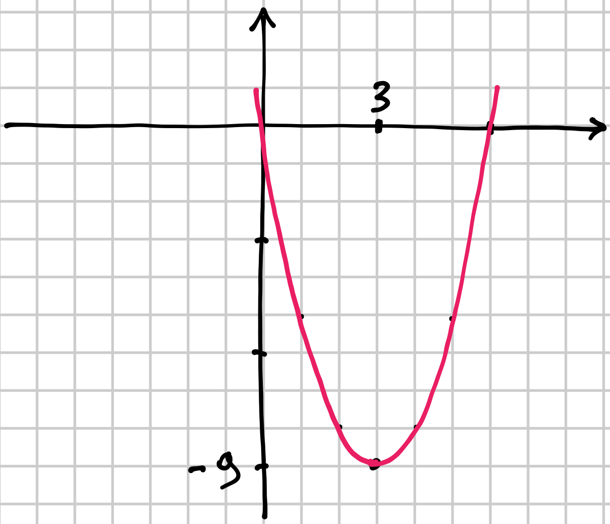
1] x^2



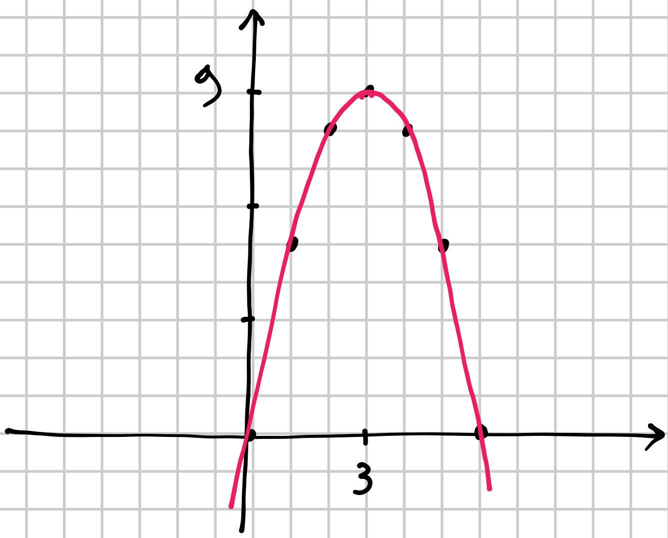
2] $(x-3)^2$



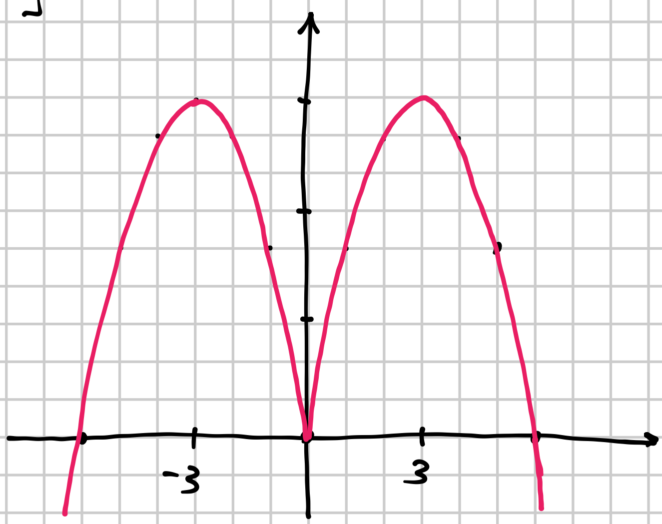
3] $(x-3)^2 - 9 = x^2 - 6x$



4] $-x^2 + 6x$ (simmetria risp. asse x)



5] $-|x|^2 + 6|x| = -x^2 + 6|x|$



36 Considera la relazione $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$, dove a è un parametro reale positivo.

a. Esprimi y in funzione di x e, indicata con f la funzione trovata, determina il dominio, l'insieme immagine e gli intervalli in cui f è positiva.

b. Dopo aver posto $a=1$, considera $g(x)=-x+4$ e determina le espressioni di $f\circ g$ e $g\circ f$.

c. Dimostra che $f\circ g$ è una funzione crescente in $\mathbb{R}$.

$\left[\text{a) } y=\frac{ax}{x-a}, D=\mathbb{R}-\{0,a\}, Im(f)=\mathbb{R}-\{0,a\},]-\infty;0[\cup]a;+\infty[;\right.$
$\left.\text{b) } (f\circ g)(x)=\frac{x-4}{x-3}, (g\circ f)(x)=\frac{3x-4}{x-1}\right]$

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$ $\quad a>0 \quad$ $x, y\neq 0$

$\frac{1}{y}=\frac{1}{a}-\frac{1}{x} \qquad \frac{1}{y}=\frac{x-a}{ax} \qquad y=\frac{ax}{x-a}$

$f(x)=\frac{ax}{x-a} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{0,a\}=(-\infty,0)\cup(0,a)\cup(a,+\infty)$

perché deriva dalla relazione iniziale (INESSENZIALE)

Per determinare l'insieme immagine bisogna stabilire per quali y l'equazione

$\frac{ax}{x-a}=y$ ha soluzione

Ricavo la x

$\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq a \\ ax=yx-ay \end{cases} \qquad \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq a \\ yx-ax=ay \end{cases}$

$x(y-a)=ay$

$x=\frac{ay}{y-a}$

ha senso per $y\neq a$ e $y\neq 0$

$Im(f)=\{y\in\mathbb{R} \mid y\neq 0 \wedge y\neq a\}=\mathbb{R}\setminus\{0,a\}$

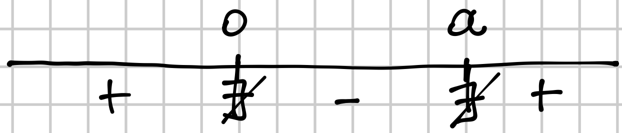
Significa che, dato $y\neq 0$ e $y\neq a$, la x che ha per immagine questa y è $x=\frac{ay}{y-a}$

f è positiva (>0) negli intervalli in cui

$$\frac{ax}{x-a} > 0 \implies \frac{x}{x-a} > 0 \implies x<0 \ \vee \ x>a$$

$$f>0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (a, +\infty)$$

$\underbrace{f \text{ è positiva}}_{f>0}$ in $(-\infty, 0)\cup(a,+\infty)$



b) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ $\qquad g(x) = -x+4$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x+4) = \frac{-x+4}{-x+4-1} = \frac{-x+4}{-x+3} = \frac{x-4}{x-3}$$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{x}{x-1} + 4 = \frac{-x+4x-4}{x-1} =$$

$$= \frac{3x-4}{x-1}$$

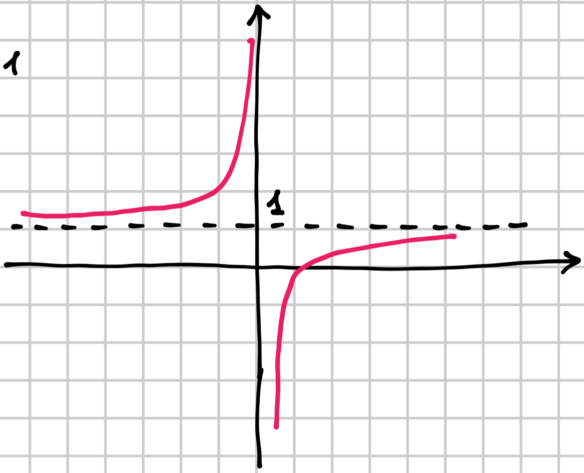
c) $$(f\circ g)(x) = h(x) = \frac{x-4}{x-3} = \frac{x-3-1}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} - \frac{1}{x-3} =$$

$$= 1 - \frac{1}{x-3}$$

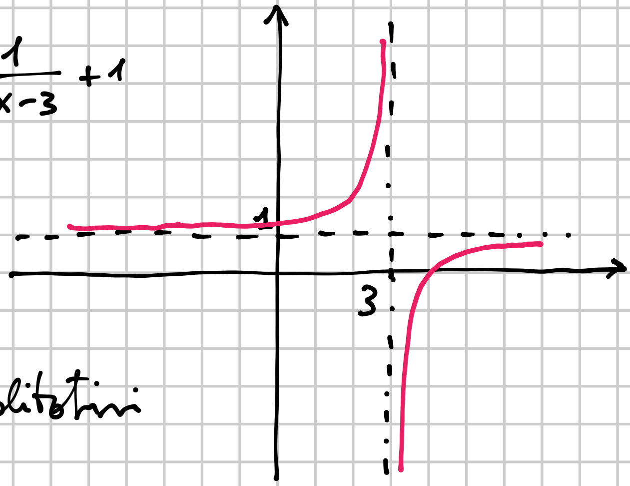
$\dfrac{1}{x}$

$-\dfrac{1}{x}$

$-\frac{1}{x}+1$



$-\frac{1}{x-3}+1$



grafici qualitativi

Tale funzione <u>NON</u> è strett. crescente nel suo dominio $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, ma lo è separatamente in $(-\infty, 3)$ e in $(3, +\infty)$