11/11/2021

37 Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{9x^2 + 2kx - k}$, con $k \in \mathbb{R}$,

a. trova per quali valori di k la funzione ha come dominio l'insieme $\mathbb{R}$;

b. determina il valore di k per cui il grafico di $f(x)$ passa per $(0; 1)$ e trova l'immagine di 2 e la controimmagine di $\frac{3}{4}$;

c. risolvi la disequazione $2f(2x) - \dfrac{f(x)}{2} > 0$.

$\left[\text{a)} -9 < k < 0; \text{b)}\ k = -1; \frac{1}{33}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \text{c)}\ x < \frac{3}{4}\right]$

a) La funzione ha come dominio $\mathbb{R}$ se il denominatore non si annulla per nessun $x \in \mathbb{R}$. Questo si verifica se $\Delta < 0$

$$\frac{\Delta}{4} = k^2 - 9(-k) = k^2 + 9k < 0 \qquad k(k+9) < 0$$

$$\boxed{-9 < k < 0}$$

b) • $y = \dfrac{1}{9x^2 + 2kx - k}$ $\qquad P(0,1)$

$$1 = \frac{1}{9 \cdot 0^2 + 2k \cdot 0 - k} \Rightarrow 1 = -\frac{1}{k} \Rightarrow k = -1$$

• $f(x) = \dfrac{1}{9x^2 - 2x + 1} \qquad f(2) = \dfrac{1}{9 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1} = \dfrac{1}{36 - 4 + 1} = \dfrac{1}{33}$

• $f(x) = \dfrac{3}{4} \qquad \dfrac{1}{9x^2 - 2x + 1} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow 4 = 27x^2 - 6x + 3$

$$27x^2 - 6x - 1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 9 + 27 = 36 \qquad x = \frac{3 \pm 6}{27} = \begin{cases} -\dfrac{3}{27} = -\dfrac{1}{9} \\[2mm] \dfrac{9}{27} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Le controimmagini di $\frac{3}{4}$ sono $-\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{3}$

$$f^{-1}\left(\left\{\frac{3}{4}\right\}\right) = \underbrace{\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right\}}_{\text{INSIEME CONTROIMMAGINE DELL'INSIEME } \left\{\frac{3}{4}\right\}}$$

c)

$$2f(2x) - \frac{f(x)}{2} > 0 \qquad f(x) = \frac{1}{9x^2 - 2x + 1}$$

$$2\,\frac{1}{9(2x)^2 - 2(2x) + 1} - \frac{1}{2(9x^2 - 2x + 1)} > 0$$

$$\frac{2}{36x^2 - 4x + 1} - \frac{1}{2(9x^2 - 2x + 1)} > 0$$

$$\frac{4(9x^2 - 2x + 1) - (36x^2 - 4x + 1)}{\cancel{2(36x^2 - 4x + 1)(9x^2 - 2x + 1)}} > 0$$

→ posso semplificare perché il denominatore è sempre > 0 perché entrambi i Δ sono negativi!

$$3\cancel{6x^2} - 8x + 4 - 3\cancel{6x^2} + 4x - 1 > 0$$

$$-4x + 3 > 0 \qquad -4x > -3 \qquad 4x < 3 \qquad \boxed{x < \frac{3}{4}}$$

38 Data la funzione

$$f(x) = \frac{ax-2}{x-2a},$$

a. determina per quali valori di a esiste almeno una x tale che $f(x) = a$;

b. verifica che, al variare di a, $f(x)$ non è mai suriettiva;

c. calcola per quali valori di a la funzione $f(x)$ è invertibile;

d. determina, relativamente ai valori di a trovati nel punto **c**, l'equazione della funzione $g(x)$ la cui inversa è proprio la funzione $f(x)$.

$\left[\text{a) } a=-1, a=1; \text{ c) } a \neq \pm 1; \text{ d) } y = \frac{2(ax-1)}{x-a}\right]$

a) Bisogna determinare per quali a l'equazione $\frac{ax-2}{x-2a} = a$ ha soluzione.

Dato un certo a, vediamo se riusciamo a trovare x tale per cui $f(x) = a$

da questo ricavo x (cerco di risolvere l'equazione)

DOMINIO: $x \neq 2a$

$$\frac{ax-2}{x-2a} = a$$

$$\cancel{ax} - 2 = \cancel{ax} - 2a^2 \Rightarrow -2 = -2a^2$$

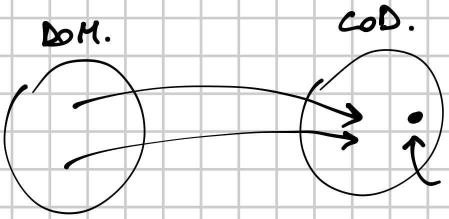
$$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \pm 1}$$

Gli unici valori di a per cui sussiste l'uguaglianza $\frac{ax-2}{x-2a} = a$ sono 1 e -1

b) $f(x) = \frac{ax-2}{x-2a}$

Per verificare che non è mai suriettiva devo mostrare che esiste almeno un y nel codominio $\mathbb{R}$ tale che l'equazione

$$\frac{ax-2}{x-2a} = y$$ non ha soluzione



c'è un elemento a cui non arrivano frecce

$$\frac{ax-2}{x-2a}=y$$ dato y, ricavo la x D: $x\neq 2a$

$$ax-2=y(x-2a)$$

$$ax-2=xy-2ay \qquad ax-xy=2-2ay$$

$$x(a-y)=2-2ay$$

se $a\neq y$ $\quad x=\dfrac{2-2ay}{a-y}$

da qui si vede che x (che sarebbe la controimmagine di y) non è definita se $y=a$.

$y=a \Rightarrow$ equazione $x(a-y)=2-2ay$ → IMPOSSIBILE se $a\neq\pm1$; → INDETERMINATA se $a=\pm1$

Quindi, nella funzione $f(x)=\dfrac{ax-2}{x-2a}$ $\quad f:\mathbb{R}\setminus\{2a\}\to\mathbb{R}$
(per qualsiasi valore di $a\neq\pm1$)

si ha che a non ha controimmagini, quindi f non può essere suriettiva.

Nel caso in cui $a=\pm1$ $\quad f(x)$ è costante e ancora non sarebbe suriettiva.

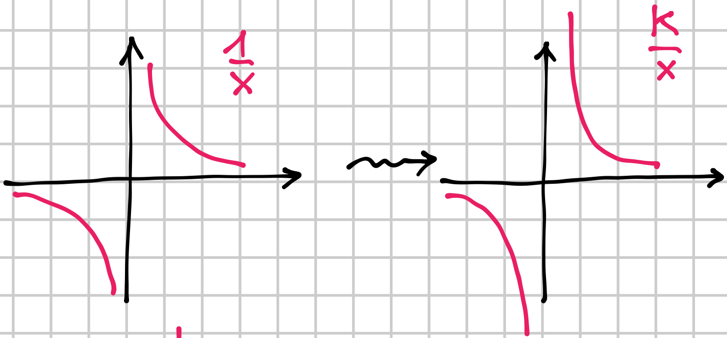
c) $f(x) = \dfrac{ax-2}{x-2a}$ per $a = \pm 1$ è costante, quindi non invertibile

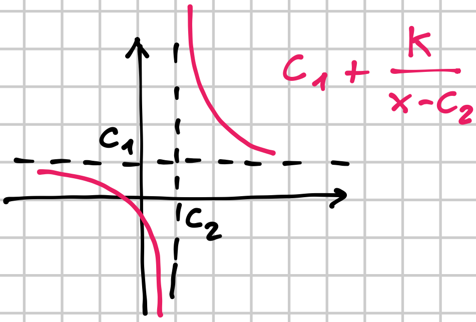
Vediamo per quali $a \neq \pm 1$ f è iniettiva

$$\frac{ax-2}{x-2a} = \frac{a\left(x-\frac{2}{a}\right)}{x-2a} = \frac{a\left(x-2a+2a-\frac{2}{a}\right)}{x-2a} =$$

$$= \frac{a\cancel{(x-2a)}}{\cancel{x-2a}} + \frac{2a^2-2}{x-2a} = a + \frac{2a^2-2}{x-2a}$$

è chiaramente iniettiva perché è la trasformata di $\frac{1}{x}$ tramite traslazioni e dilatazione





Con queste trasformazioni l'iniettività è mantenuta

IN ALTERNATIVA SI FA VEDERE CHE

$$a + \frac{2a^2-2}{x_1-2a} = a + \frac{2a^2-2}{x_2-2a} \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow x_1 = x_2$$ è iniettiva

$\Downarrow$

INVERTIBILE

per $a \neq \pm 1$

d)

$$f(x) = \frac{ax-2}{x-2a}$$

$$y = \frac{ax-2}{x-2a}$$

$$\Big\downarrow \text{ ricavo la } x$$

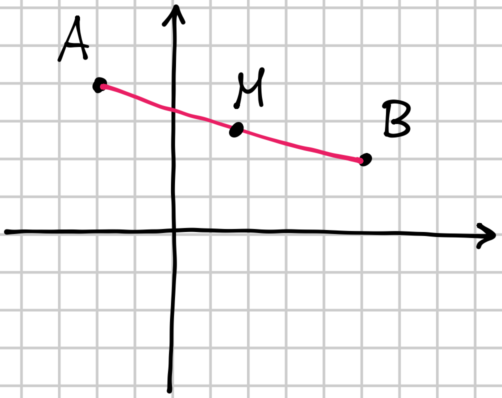
$$x = \frac{2-2ay}{a-y}$$

scambio x e y

$$y = \frac{2-2ax}{a-x}$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{2(1-ax)}{a-x}}$$

LE RETTE NEL PIANO CARTESIANO

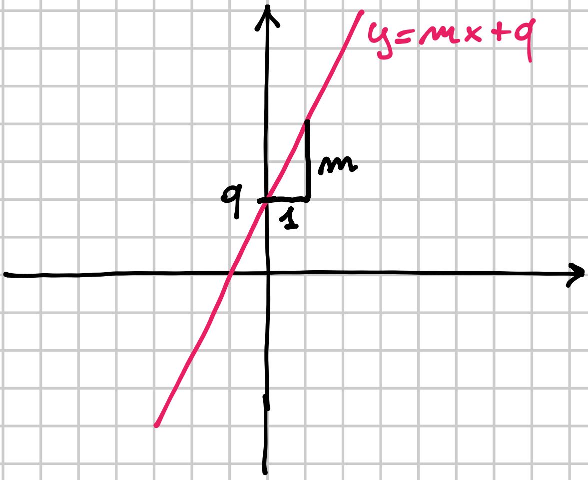


DISTANZA

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

PUNTO MEDIO

$$M_{AB} = \left(\frac{x_A + x_B}{2} , \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$



FORMA ESPLICITA

$$y = mx + q$$

coeff. angolare → m; ordinata all'origine → q

PARALLELISMO F. ESPL.

$$m = m'$$

PERPENDICOLARITÀ ESPL.

$$m = -\frac{1}{m'}$$

$$(m \cdot m' = -1)$$

FORMA IMPLICITA

$$ax + by + c = 0$$

$$m = -\frac{a}{b}$$

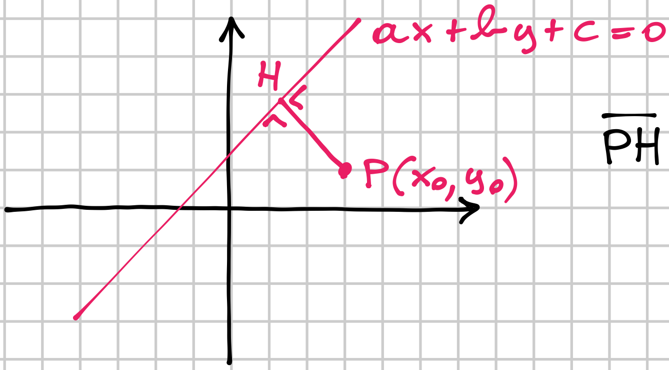
PARALLELISMO F. IMPL.

$$ab' - a'b = 0$$

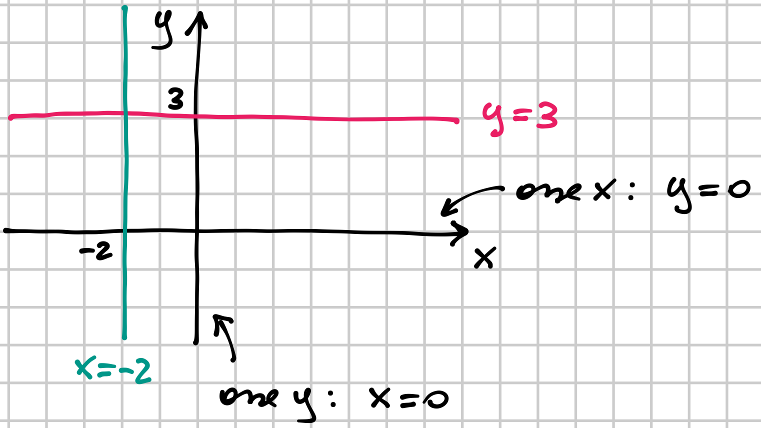
PERPEND. F. IMPL.

$$aa' + bb' = 0$$

DISTANZA PUNTO-RETTA



$$\overline{PH} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



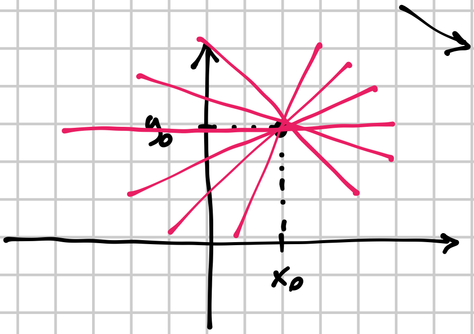
- le rette $y=K$ $(K\in\mathbb{R})$ sono orizzontali con coeff. angolare $m=0$ (sono i grafici delle funzioni costanti)
- le rette $x=K$ $(K\in\mathbb{R})$ sono verticali e non è definito il coeff. angolare (oppure si dice che $m=\infty$) (non sono grafici di funzioni)

RETTA PER UN PUNTO (x_0,y_0) (FASCIO DI RETTE PER (x_0,y_0))

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

(infinite rette al variare di m)

→ non c'è fra queste quella verticale!



RETTA PER 2 PUNTI $A(x_A,y_A)$ $B(x_B,y_B)$

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A}$$

Il coeff. angolare della retta per A e B è $m_{AB}=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$