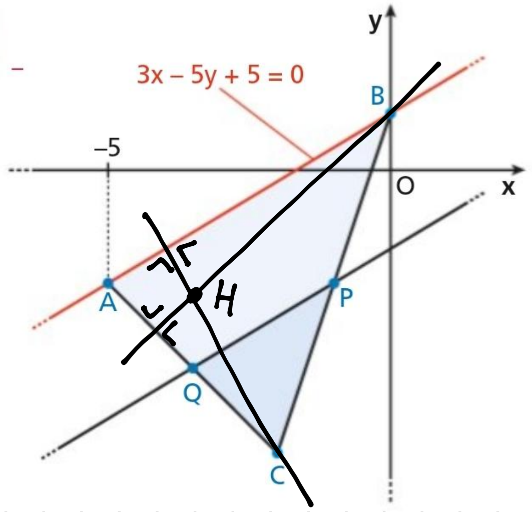
7/12/2021

58



Il triangolo ABC della figura ha l'ortocentro in $H\left(-\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right)$.

a. Trova le coordinate di A, B e C.

b. Determina sul segmento BC il punto P tale che

$$\overline{PA}^2 = \frac{6}{5}\overline{PB}^2 + 4\overline{BO}^2.$$

c. Da P traccia la parallela ad AB che interseca in Q il lato AC. Calcola il rapporto tra le aree dei triangoli ABC e PQC.

[a) $A(-5; -2)$, $B(0;1)$, $C(-2; -5)$; b) $P(-1; -2)$; c) 4]

a) $A(-5, y_A)$ $\quad 3(-5) - 5y_A + 5 = 0 \quad -15 - 5y_A + 5 = 0$

$y_A = -2$

$\boxed{A(-5,-2)}$

$B(0, y_B)$ $\quad 3 \cdot 0 - 5y_B + 5 = 0 \quad y_B = 1$

$\boxed{B(0,1)}$

b) Trovo la retta CH, che è la retta per H perpendicolare ad AB

$m_{AB} = \frac{3}{5}$ $\quad y + \frac{5}{2} = -\frac{5}{3}\left(x + \frac{7}{2}\right) \quad y = -\frac{5}{3}x - \frac{35}{6} - \frac{5}{2}$

$y = -\frac{5}{3}x - \frac{\cancel{50}^{25}}{\cancel{6}_{3}}$

$y = -\frac{5}{3}x - \frac{25}{3}$

C dunque ha coordinate $\left(x_c, -\frac{5}{3}x_c - \frac{25}{3}\right)$

Le rette BH e AC devono essere perpendicolari, cioè deve essere che $m_{BH} \cdot m_{AC} = -1$

$B(0,1) \quad H\left(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right) \quad A(-5,-2) \quad C\left(x_c, -\frac{5}{3}x_c - \frac{25}{3}\right)$

$$m_{BH} = \frac{-\frac{5}{2} - 1}{-\frac{7}{2} - 0} = \frac{-\frac{7}{2}}{-\frac{7}{2}} = 1 \qquad m_{AC} = \frac{-\frac{5}{3}x_c - \frac{25}{3} + 2}{x_c + 5}$$

$$m_{BH} \cdot m_{AC} = -1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{-\frac{5}{3}x_c - \frac{25}{3} + 2}{x_c + 5} = -1 \qquad x_c \neq -5$$

$$-\frac{5}{3}x - \frac{25}{3} + 2 = -x - 5$$

$$-5x - 25 + 6 = -3x - 15$$

$$-2x = 4 \qquad x = -2 \Rightarrow x_c = -2$$

$$\boxed{C(-2, -5)}$$

$$-\frac{5}{3}(-2) - \frac{25}{3}$$

b) Trovo la retta BC $\quad B(0,1) \quad C(-2,-5)$

$y = mx + q$

$$\begin{cases} 1 = m \cdot 0 + q \\ -5 = -2m + q \end{cases} \qquad \begin{cases} q = 1 \\ m = 3 \end{cases}$$

$y = 3x + 1$

oppure

$$\frac{y-1}{-5-1} = \frac{x-0}{-2-0}$$

$$y - 1 = \frac{-6}{-2}x \qquad y = 3x + 1$$

La retta su cui giace il segmento BC è $\quad y = 3x + 1$

Siccome P deve appartenere al segmento BC $\Rightarrow -2 < x < 0$

segmento BC $\Rightarrow \begin{cases} y = 3x + 1 \\ -2 < x < 0 \end{cases}$ $\qquad P(x_p, 3x_p + 1)$

con $-2 < x_p < 0$

$$\overline{PA}^2 = \frac{6}{5}\overline{PB}^2 + 4\overline{BO}^2$$

$A(-5,-2)$

$B(0,1)$

$\overline{PA}^2 = (x_p + 5)^2 + (3x_p + 1 + 2)^2$

$\overline{PB}^2 = (x_p - 0)^2 + (3x_p + 1 - 1)^2 \qquad \overline{BO}^2 = 1$

$$\begin{cases} (x+5)^2 + (3x+3)^2 = \frac{6}{5}\left[x^2 + 9x^2\right] + 4 \\ -2 < x < 0 \end{cases}$$

$x^2 + 25 + 10x + 9x^2 + 9 + 18x = 12x^2 + 4$

$-2x^2 + 28x + 30 = 0 \qquad x^2 - 14x - 15 = 0$

$(x - 15)(x + 1) = 0$

$x = -1$

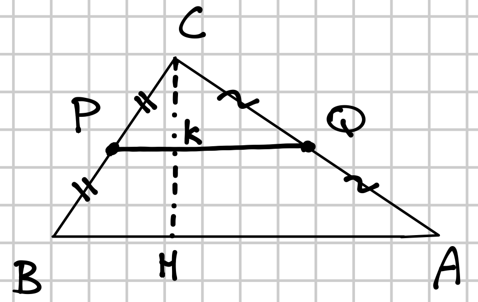
$x = 15$ N.A. perché $-2 < x < 0$

$x_p = -1 \Rightarrow y_p = 3x_p + 1 = -3 + 1 = -2$

$\boxed{P(-1,-2)}$

osserviamo che P è il punto medio di BC

c) CON LA GEOMETRIA SINTETICA



Se $PQ \parallel AB$, anche Q è il punto medio di AC

I due triangoli ABC e PQC sono SIMILI, con rapporto di similitudine 2.
Di conseguenza, il rapporto tra le aree di ABC e PQC è $2^2 = 4$

$$\overline{AB} = 2\,\overline{PQ}$$

$$\overline{CH} = 2\,\overline{CK}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CH} =$$

$$= \frac{1}{2}\,2\overline{PQ}\cdot 2\overline{CK} = 4\left(\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{CK}\right) = 4\,\mathcal{A}_{PQC}$$

CON LA GEOMETRIA ANALITICA

$A(-5,-2)\quad B(0,1)\quad C(-2,-5)$

- Trovo la retta per P parallela ad AB: $\quad P(-1,-2)$

$$m_{AB} = \frac{-2-1}{-5-0} = \frac{3}{5} \qquad y+2 = \frac{3}{5}(x+1)$$

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5} - 2 \qquad y = \frac{3}{5}x - \frac{7}{5}$$

- Trovo la retta per A e C:

$$\frac{y+2}{-5+2} = \frac{x+5}{-2+5}$$

$$\frac{y+2}{-3} = \frac{x+5}{3}$$

$$y+2 = -x-5 \qquad y = -x-7$$

• Trovo il punto Q

$$\begin{cases} y = \frac{3}{5}x - \frac{7}{5} \\ y = -x - 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x - 7 = \frac{3}{5}x - \frac{7}{5} \\ // \end{cases} \qquad \begin{cases} -5x - 35 = 3x - 7 \\ // \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8x = 28 \\ // \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{28}{8} = -\frac{7}{2} \\ y = \frac{7}{2} - 7 = -\frac{7}{2} \end{cases} \qquad Q\left(-\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right)$$

• METODO PER TROVARE L'AREA DI UN TRIANGOLO DATI I TRE VERTICI

$$A(x_A, y_A) \quad B(x_B, y_B) \quad C(x_C, y_C)$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

deve venire positivo

DETERMINANTE

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} x_A & y_A & 1 & x_A & y_A \\ x_B & y_B & 1 & x_B & y_B \\ x_C & y_C & 1 & x_C & y_C \end{matrix} = (x_A \cdot y_B + y_A \cdot x_C + x_B \cdot y_C) - (x_C y_B + x_A y_C + y_A \cdot x_B)$$

$A(-5,-2) \quad B(0,1) \quad C(-2,-5)$

$$\begin{vmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} -5 & -2 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & 1 & -2 & -5 \end{matrix} = (-5+4)-(-2+25) =$$

$$= -1-23 = -24$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$$

$P(-1,-2) \quad Q\left(-\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right) \quad C(-2,-5)$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & 1 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ -2 & -5 & 1 & -2 & -5 \end{matrix} = \frac{7}{2} + 4 + \frac{35}{2} -$$

$$-(7+5+7) =$$

$$= 25 - 19 = 6$$

$$\mathcal{A}_{PQC} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

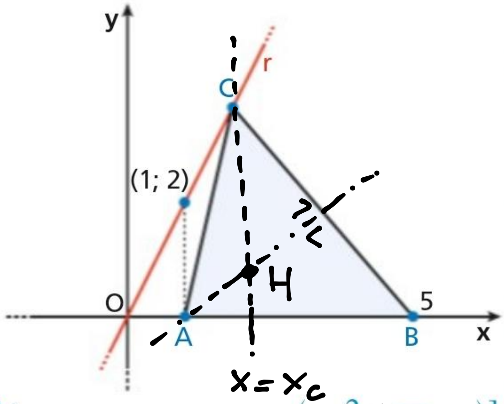
$$\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{PQC}} = \frac{12}{3} = 4$$

59 Scrivi l'equazione della retta r della figura e considera su r un punto C variabile.

a. Determina il baricentro G del triangolo ABC e scrivi l'equazione del luogo descritto da G. Calcola le coordinate di C quando G ha ascissa 3.

b. Determina C nel primo quadrante in modo che $\overline{AC} = \sqrt{17}$ e trova l'ortocentro H di ABC.

c. Trova C in modo che il triangolo ABC sia isoscele, con base AB, e determina l'incentro di ABC.



$\left[r\text{: } y = 2x\text{; a) } G\left(\frac{x_C}{3} + 2; \frac{2x_C}{3}\right); y = 2x - 4; C(3; 6)\text{; b) } C(2; 4), H\left(2; \frac{3}{4}\right)\text{; c) } C(3; 6)\text{, incentro: } \left(3; \frac{2}{3}(\sqrt{10} - 1)\right)\right]$

Retta per l'origine $y = mx$ e per $(1,2) \Rightarrow 2 = m \cdot 1 \Rightarrow y = 2x$

$C(x_c, 2x_c) \quad A(1,0) \quad B(5,0)$

a) $G\left(\frac{x_c+1+5}{3}, \frac{2x_c+0+0}{3}\right) = \left(\frac{x_c+6}{3}, \frac{2x_c}{3}\right) = \begin{cases} x = \frac{x_c+6}{3} \\ y = \frac{2x_c}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} X = \frac{x_c+6}{3} \\ x_c = \frac{3y}{2} \end{cases}$

ELIMINO IL PARAMETRO x_c

$x = \frac{\frac{3y}{2}+6}{3}$ equazione del luogo descritto da G

$3x = \frac{3y}{2} + 6 \qquad 6x = 3y + 12$

$3y = 6x - 12$

$\boxed{y = 2x - 4}$

$x_G = 3 \Rightarrow G(3, 2)$

b) $A(1,0) \quad C(x_c, 2x_c) \qquad \overline{AC} = \sqrt{17} \iff \overline{AC}^2 = 17$

$(1-x_c)^2 + (0-2x_c)^2 = 17 \qquad 1 + x^2 - 2x + 4x^2 - 17 = 0$

$5x^2 - 2x - 16 = 0$

chiamo x

$5x^2 - 2x - 16 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = 1 + 80 = 81 \qquad x = \frac{1 \pm 9}{5} = \begin{cases} -\frac{8}{5} & \text{N.A. perché } C \in \text{I QUADR.} \\ \frac{10}{5} = 2 \end{cases}$

$\Downarrow$

$C(2,4)$

1° altezza $x = 2$

$B(5,0)$

2° altezza: retta per $A \perp BC \qquad m_{BC} = \frac{4-0}{2-5} = -\frac{4}{3}$

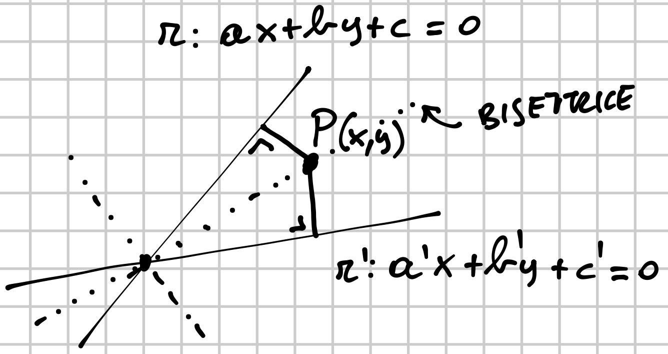
$$y - 0 = \frac{3}{4}(x-1) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{3}{4} \cdot 2 - \frac{3}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{3}{4} \end{cases} \quad \boxed{H\left(2, \frac{3}{4}\right)}$$

c) Affinché ABC sia isoscele, l'altezza relativa ad AB deve intersecare AB nel suo punto medio:

$$M_{AB}\left(\frac{1+5}{2}, 0\right) = (3,0) \Rightarrow x_C = 3 \Rightarrow C(3,6)$$

INCENTRO: centro della circonferenza inscritta = punto di incontro delle bisettrici degli angoli interni



$P(x,y)$ deve avere la stessa distanza da r e r'

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|a'x+b'y+c|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

Togliendo i moduli

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm \frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

$A(1,0)$ $B(5,0)$ $C(3,6)$ bisettrice dell'angolo $\hat{C}$: $x=3$
(perché ABC è isoscele)

retta AB : $y=0$

retta AC : $\frac{y-0}{6-0} = \frac{x-1}{3-1}$ $\quad \frac{y}{6} = \frac{x-1}{2}$ $\quad y = 3x-3$

$$3x-y-3=0$$

bisettrice dell'angolo $\hat{A}$ $\quad \frac{3x-y-3}{\sqrt{3^2+1^2}} = \pm \frac{y}{\sqrt{1^2+0^2}}$

$$3x-y-3 = \pm\sqrt{10}\, y$$

scelgo quello col + perché la bisettrice cercata deve avere il coeff. angolare positivo

$$3x-(1+\sqrt{10})y-3=0$$

INCENTRO $\begin{cases} 3x-(1+\sqrt{10})y-3=0 \\ x=3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 6-(1+\sqrt{10})y=0 \\ x=3 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \frac{6}{\sqrt{10}+1}\cdot\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}-1} = \frac{6(\sqrt{10}-1)}{10-1} = \frac{2}{3}(\sqrt{10}-1) \\ x=3 \end{cases}$$

$$\boxed{I\left(3, \frac{2}{3}(\sqrt{10}-1)\right)}$$