20/1/2022

252 Scrivi l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione $y = 3x^2 - 4x$ e perpendicolare alla retta di equazione $x - 3y = 0$, poi determina il punto di tangenza.

$$\left[y = -3x - \frac{1}{12}; \left(\frac{1}{6}; -\frac{7}{12}\right)\right]$$

$x - 3y = 0 \qquad x = 3y \qquad y = \frac{1}{3}x$

$\Downarrow$

perpendicolare $\quad y = -3x + q$ DA TROVARE

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 4x \\ y = -3x + q \end{cases}$$ questo sistema deve avere una sola soluzione

$\Downarrow$

$3x^2 - 4x = -3x + q$ eq. risolvente $\rightarrow$ deve avere $\Delta = 0$

$3x^2 - x - q = 0$

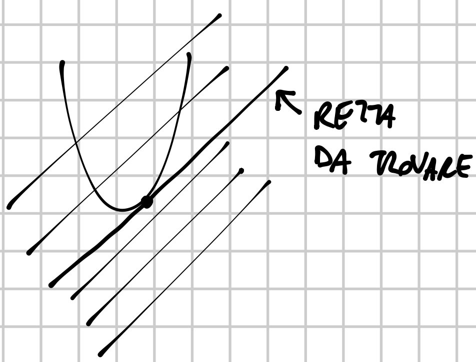
PONGO

$\Delta = 1 - 4 \cdot 3 \cdot (-q) = 0 \qquad 1 + 12q = 0 \qquad q = -\frac{1}{12}$

$y = -3x - \frac{1}{12}$ RETTA TANGENTE

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 4x \\ y = -3x - \frac{1}{12} \end{cases}$$ ...... $3x^2 - x + \frac{1}{12} = 0 \qquad \Delta = 1 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{12} = 0$ OVVIAMENTE!

$$\begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = -3 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{-6-1}{12} = -\frac{7}{12} \end{cases}$$



$P\left(\frac{1}{6}, -\frac{7}{12}\right)$ PUNTO DI TANGENZA

253 Trova le equazioni delle rette passanti per $A(1;11)$ e tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 19$ e l'equazione della tangente alla parabola nel suo punto $B(2;13)$.

[$y = x + 10$; $y = -7x + 18$; $y = -x + 15$]

$A(1,11)$

$$\begin{cases} y - 11 = m(x-1) \\ y = x^2 - 5x + 19 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 19 - 11 = mx - m$$

$$x^2 - 5x - mx + 8 + m = 0$$

$$x^2 - (5+m)x + m + 8 = 0$$

pongo $\Delta = 0$

$$(5+m)^2 - 4(m+8) = 0$$

$$25 + m^2 + 10m - 4m - 32 = 0$$

$$m^2 + 6m - 7 = 0$$

$$(m+7)(m-1) = 0 \quad m = 1 \quad m = -7$$

1° TANGENTE $m = 1$ $\quad y - 11 = 1 \cdot (x-1)$

$$y = x - 1 + 11 \qquad \boxed{y = x + 10}$$

2° TANGENTE $m = -7$ $\quad y - 11 = -7(x-1)$

$$y - 11 = -7x + 7 \qquad \boxed{y = -7x + 18}$$

$B(2,13)$ $\quad y = x^2 - 5x + 19$ $\quad B \in$ parabola

$\Downarrow$

1 tangente

$y - 13 = m(x-2)$ "retta" per B

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 19 \\ y - 13 = m(x-2) \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 19 - 13 = mx - 2m$$

$$x^2 - 5x - mx + 6 + 2m = 0$$

$$x^2 - (5+m)x + 6 + 2m = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (5+m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (6+2m) = 0$$

$$25 + m^2 + 10m - 24 - 8m = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$(m+1)^2 = 0 \Rightarrow m = -1$$

In $y - 13 = m(x-2)$ inserisco $m = -1$

$y - 13 = -x + 2$ $\quad \boxed{y = -x + 15}$

SCORCIATOIA

Se il punto $P(x_0, y_0)$ appartiene alla parabola $y = ax^2 + bx + c$ il coefficiente angolare della tangente alla parabola in P è $m = 2ax_0 + b$

DIMOSTRAZIONE DELLA SCORCIATOIA

$P(x_0, y_0)$

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \implies y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c \quad \text{perché } P \in \text{parabola} \\ y - y_0 = \underset{\text{DA TROVARE}}{m} (x - x_0) \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c - y_0 = mx - mx_0$$

$$ax^2 + bx - mx + c + mx_0 - y_0 = 0$$

$$ax^2 + (b - m)x + c + mx_0 - y_0 = 0$$

$$\Delta = 0 \implies (b - m)^2 - 4a(c + mx_0 - y_0) = 0$$

$$b^2 + m^2 - 2mb - 4ac - 4amx_0 + 4ay_0 = 0$$

$$m^2 - 2(b + 2ax_0)m + b^2 - 4ac + 4ay_0 = 0$$

$$m^2 - 2(b + 2ax_0)m + b^2 - 4ac + 4a(ax_0^2 + bx_0 + c) = 0$$

$$m^2 - 2(b + 2ax_0)m + b^2 \cancel{- 4ac} + 4a^2x_0^2 + 4abx_0 \cancel{+ 4ac} = 0$$

$$m^2 - 2(b + 2ax_0)m + (b + 2ax_0)^2 = 0$$

$$[m - (b + 2ax_0)]^2 = 0 \implies m = b + 2ax_0$$

ESEMPIO

Data la parabola $y = -2x^2 + 3x - 1$, trovare la tangente nel suo punto di ascissa 2.

$P(2, ?)$ $\qquad x_0 = 2 \qquad y_0 = -2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = -8 + 6 - 1 = -3$

$$\Downarrow$$

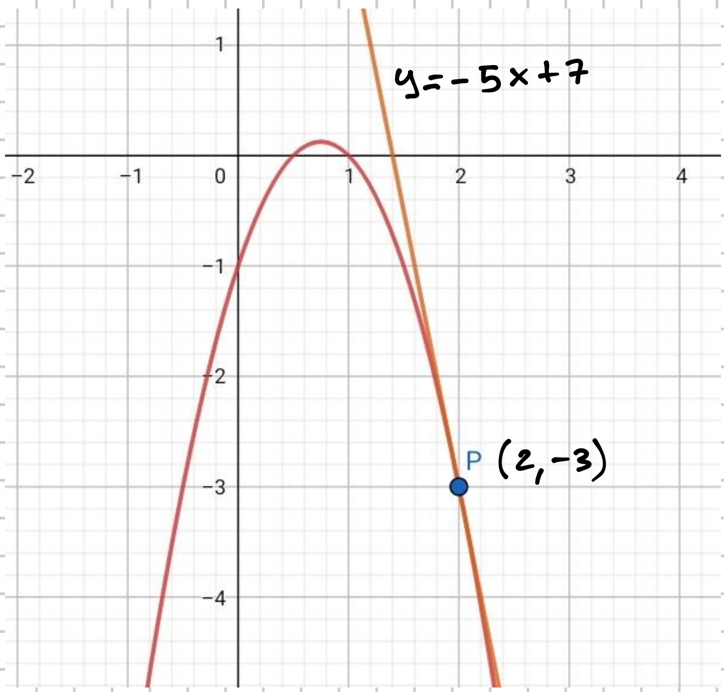
$$P(2, -3)$$

$$m = 2ax_0 + b = 2(-2) \cdot 2 + 3 = -8 + 3 = -5$$

TANGENTE $\qquad y - y_0 = m(x - x_0) \qquad y + 3 = -5(x - 2)$

$$y = -5x + 10 - 3$$

$$\boxed{y = -5x + 7}$$



$y = -2x^2 + 3x - 1$

367 Scrivi l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ passante per i punti $A(2; 0)$, $B(1; -1)$ e tangente alla retta di equazione $y = -2x + 5$.

$[y = -x^2 + 4x - 4; \ y = -9x^2 + 28x - 20]$

$$y = \underbrace{a}x^2 + \underbrace{b}x + \underbrace{c}$$

DA TROVARE

$A(2,0)$ $\quad \begin{cases} 0 = 4a + 2b + c \\ -1 = a + b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a + 2b - a - b - 1 = 0 \\ c = -a - b - 1 \end{cases}$

$B(1,-1)$

$$\begin{cases} b = 1 - 3a \\ c = -a - 1 + 3a - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 1 - 3a \\ c = 2a - 2 \end{cases}$$

mi manca solo a

$$y = ax^2 + (1-3a)x + 2a - 2$$

$$\begin{cases} y = ax^2 + (1-3a)x + 2a - 2 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$$

$$-2x + 5 = ax^2 + (1-3a)x + 2a - 2$$

$$ax^2 + (1-3a)x + 2x + 2a - 2 - 5 = 0$$

$$ax^2 + (1 - 3a + 2)x + 2a - 7 = 0$$

$$ax^2 + (3 - 3a)x + 2a - 7 = 0$$

pongo $\Delta = 0$ $\qquad (3 - 3a)^2 - 4a(2a - 7) = 0$

$$(3-3a)^2-4a(2a-7)=0$$

$$9+9a^2-18a-8a^2+28a=0$$

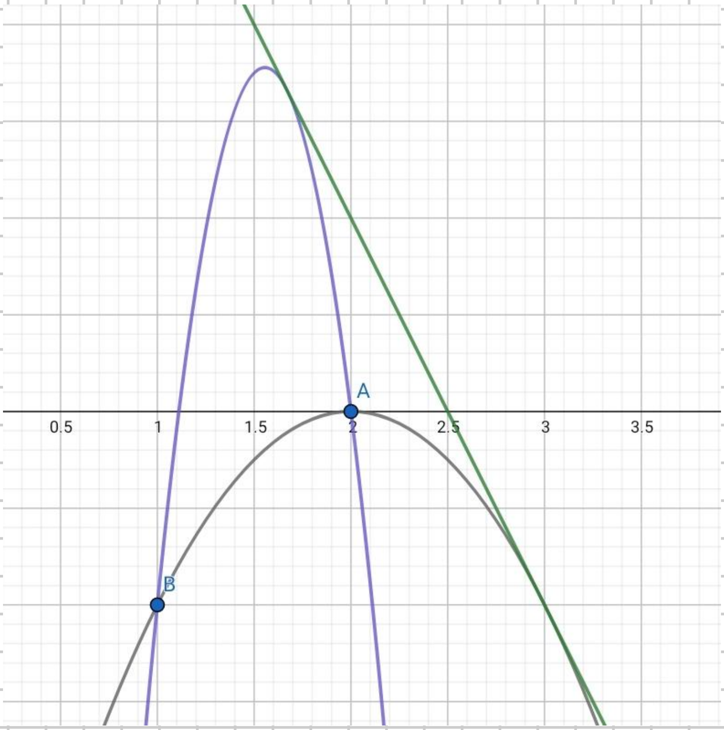
$$a^2+10a+9=0$$

$$(a+9)(a+1)=0 \quad \begin{array}{l} a=-9 \\ a=-1 \end{array}$$

$$y=ax^2+(1-3a)x+2a-2$$ sostituisco

$a=-9$ $\quad y=-9x^2+28x-20$

$a=-1$ $\quad y=-x^2+4x-4$



368 Determina l'equazione della parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

di vertice $V(0; -2)$ e tangente alla retta di equazione $y = 6x - 5$.

$[y = 3x^2 - 2]$

$V(0,-2)$ $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 0 \\ -2 = 0 \cdot a + 0 \cdot b + c \end{cases}$ $\begin{cases} b = 0 \\ c = -2 \end{cases}$

passaggio per V

$y = ax^2 - 2$

$\begin{cases} y = ax^2 - 2 \\ y = 6x - 5 \end{cases}$ $ax^2 - 2 = 6x - 5$

$ax^2 - 6x + 3 = 0$

pongo $\frac{\Delta}{4} = 3^2 - 3a = 0$

$9 - 3a = 0 \Rightarrow a = 3$

$\boxed{y = 3x^2 - 2}$