31/1/2022

501 Determina l'equazione della parabola passante per i punti $A(0; 5)$ e $B(5; 0)$ avente come asse di simmetria la retta di equazione $x = 2$. Determina poi un punto P sull'arco di parabola AB in modo che il quadrilatero $OAPB$ abbia area $\frac{55}{2}$.

$[y = -x^2 + 4x + 5; P(3; 8) \vee P(2; 9)]$

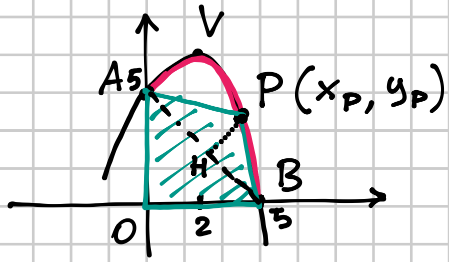
$y = ax^2 + bx + c$

$A(0,5)$ $B(5,0)$ asse simm. $x = 2$

$$\begin{cases} c = 5 \\ 25a + 5b + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 5 \\ \cancel{25}^{5}a + \cancel{5}^{1}b + \cancel{5}^{1} = 0 \\ b = -4a \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 5 \\ 5a - 4a + 1 = 0 \\ b = -4a \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 5 \\ a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$$

$y = -x^2 + 4x + 5$



$0 \leq x_P \leq 5$ $\qquad y_P = -x_P^2 + 4x_P + 5$

$\mathcal{A}_{OAPB} = \mathcal{A}_{AOB} + \mathcal{A}_{ABP}$

$\mathcal{A}_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2}$ $\qquad \mathcal{A}_{ABP} = \frac{1}{2} \overbrace{\overline{AB}}^{5\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\overline{PH}}_{\text{distanza di P dalla retta AB}}$

retta AB: $y = -x + 5 \Rightarrow x + y - 5 = 0$ $\qquad P(x_P, -x_P^2 + 4x_P + 5)$

$$\overline{PH} = \frac{|x_P - x_P^2 + 4x_P \cancel{+5} \cancel{-5}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-x_P^2 + 5x_P|}{\sqrt{2}} \quad \left(= \frac{|x_P^2 - 5x_P|}{\sqrt{2}} \right)$$

per comodità

$0 \leq x_P \leq 5$

$$\mathcal{A}_{OAPB} = \frac{55}{2}$$

IMPONGO

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{OAPB} = \dfrac{25}{2} + \dfrac{1}{2}\, 5\cancel{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{|x_P^2 - 5x_P|}{\cancel{\sqrt{2}}} = \dfrac{55}{2} \\ 0 \le x_P \le 5 \end{cases}$$

da adesso in poi chiamo x l'incognita

$$\begin{cases} 25 + 5|x^2 - 5x| = 55 \\ 0 \le x \le 5 \end{cases}$$

dato che per $0 \le x \le 5$ si ha $x^2 - 5x \le 0$, posso togliere il modulo mettendo davanti il $-$

$$x^2 - 5x = \underbrace{x}_{\ge 0}\underbrace{(x-5)}_{\le 0}$$

$$\begin{cases} 25 - 5(x^2 - 5x) = 55 \\ 0 \le x \le 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 25 - 5x^2 + 25x = 55 \\ 0 \le x \le 5 \end{cases}$$

$$-5x^2 + 25x - 30 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad (x-2)(x-3) = 0$$

$$x = 2 \lor x = 3$$

entrambe accettabili perché comprese fra 0 e 5

$$y = -x^2 + 4x + 5$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 + 8 + 5 = 9 \end{cases} \lor \begin{cases} x = 3 \\ y = -9 + 12 + 5 = 8 \end{cases}$$

$$\boxed{P(2,9) \quad \lor \quad P(3,8)}$$