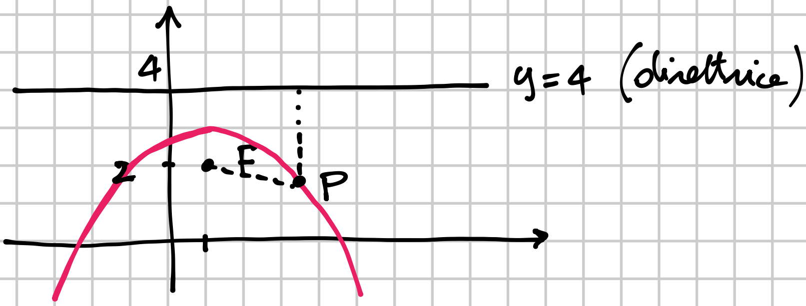
7/2/2022

Data una retta $y = K$ e un punto F esterno a tale retta, come trovare la parabola di fuoco F e direttrice $y = K$?

ESEMPIO

Scrivere l'eq. della parabola di fuoco $F(1, 2)$ e direttrice $y = 4$



1) $F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ $\qquad d: \; y = -\frac{1+\Delta}{4a}$

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ \frac{1-\Delta}{4a} = 2 \\ -\frac{1+\Delta}{4a} = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -2a \\ 1-\Delta = 8a \\ -1-\Delta = 16a \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -2a \\ \Delta = 1-8a \\ -1-1+8a = 16a \end{cases}$$

è conveniente tenere Δ come incognita

$$\begin{cases} b = -2a \\ \Delta = 1-8a \\ 16a - 8a = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ \Delta = 1+2 = 3 \\ 8a = -2 \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

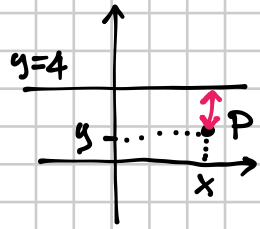
$$\Delta = b^2 - 4ac = 3 \Rightarrow \frac{1}{4} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) c = 3 \qquad \frac{1}{4} + c = 3$$

$$\Rightarrow c = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{11}{4}}$$

2) Se ricordo che per definizione la parabola è il luogo dei punti $P(x,y)$ del piano equidistanti da $F(1,2)$ e da $y=4$, allora posso scrivere

$$\overline{PF} = \underbrace{d(P,\ y=4)}_{\text{distanza di P dalla retta } y=4}$$



$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = |y-4|$$

(è già l'eq. della parabola, ma per portarla in forma normale basta elevare al quadrato)

elevo al quadrato

$$(x-1)^2+(y-2)^2 = (y-4)^2$$

$$x^2+1-2x+\cancel{y^2}+4-4y = \cancel{y^2}+16-8y$$

$$-4y+8y = -x^2+2x+16-1-4$$

$$4y = -x^2+2x+11$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{11}{4}}$$

51 Fra tutte le parabole con asse parallelo all'asse y, tangenti nel punto $T(-1;-1)$ alla bisettrice del primo e terzo quadrante, determina quella che è tangente alla retta di equazione $y = 7x + 9$. $[y = -3x^2 - 5x - 3]$

$$y = ax^2 + bx + c$$

1ª CONDIZIONE $\Rightarrow$ passaggio per $T(-1,-1)$ $\Rightarrow$ $-1 = a - b + c$

2ª CONDIZIONE $\Rightarrow$ tangenza in T alla retta $y = x$

$m = 2a x_T + b$ $\qquad$ $1 = 2a\cdot(-1) + b$

$\downarrow$
coeff. angolare della tangente

uso quello che ho trovato finora

$$\begin{cases} -1 = a - b + c \\ 1 = -2a + b \end{cases} \qquad \begin{cases} c = b - 1 - a \\ b = 1 + 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 + 2a \\ c = \cancel{1} + 2a - \cancel{1} - a \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 1 + 2a \\ c = a \end{cases}$$

$$y = ax^2 + (1+2a)x + a$$

3ª CONDIZIONE $\Rightarrow$ tangenza con $y = 7x + 9$

$$\begin{cases} y = ax^2 + (1+2a)x + a \\ y = 7x + 9 \end{cases}$$

$$ax^2 + (1+2a)x + a = 7x + 9$$

$$ax^2 + (1+2a)x - 7x + a - 9 = 0$$

$$ax^2 + (2a-6)x + a - 9 = 0$$

$$ax^2 + 2(a-3)x + a - 9 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \Rightarrow (a-3)^2 - a(a-9) = 0$$

$$(a-3)^2 - a(a-9) = 0$$

$$\cancel{a^2} + 9 - 6a - \cancel{a^2} + 9a = 0$$

$$3a = -9$$

$$a = -3$$

$$y = ax^2 + (1+2a)x + a \Rightarrow \boxed{y = -3x^2 - 5x - 3}$$