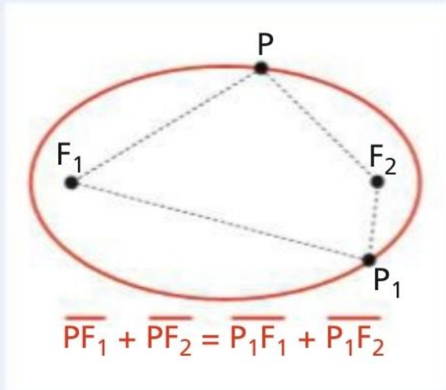
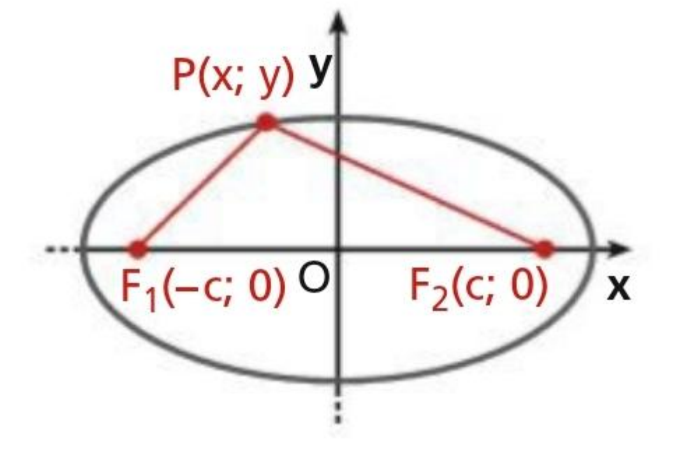
ELLISSE NEL PIANO CARTESIANO

DEFINIZIONE

Assegnati nel piano due punti, F_1 e F_2, si chiama **ellisse** il luogo geometrico dei punti P del piano tali che sia costante la somma delle distanze di P da F_1 e da F_2:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{costante}.$$





ELLISSE CON CENTRO $O(0,0)$

E FUOCHI SULL'ASSE X

$2c$ = DISTANZA FOCALE

$F_1(-c,0) \qquad F_2(c,0)$

$P(x,y)$ = generico punto dell'ellisse

(*) (Nel triangolo PF_1F_2 deve essere $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} > \overline{F_1F_2}$, cioè $2a > 2c$ cioè $a > c$)

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 + (x-c)^2+y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{c^2}+2cx+\cancel{y^2} = 4a^2+\cancel{x^2}+\cancel{c^2}-2cx+\cancel{y^2}-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$\cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \cancel{4}a^2 - \cancel{4}cx$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

$$a^2\left[(x-c)^2+y^2\right] = a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx$$

$$a^2\left[x^2+c^2-2cx+y^2\right] = a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 - \cancel{2a^2cx}$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

divido per a^2b^2

$$\frac{\cancel{b^2}x^2}{a^2\cancel{b^2}} + \frac{\cancel{a^2}y^2}{\cancel{a^2}b^2} = \frac{\cancel{a^2b^2}}{\cancel{a^2b^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

EQUAZIONE CANONICA DELL'ELLISSE CON CENTRO $O(0,0)$ E FUOCHI SULL'ASSE x

$$a^2 - b^2 = c^2 \qquad (b<a)$$

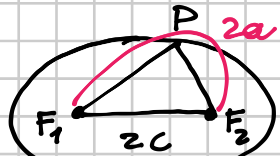
a = SEMIASSE MAGGIORE

b = SEMIASSE MINORE

c = SEMIDISTANZA FOCALE

$$a^2 - c^2 = b^2$$

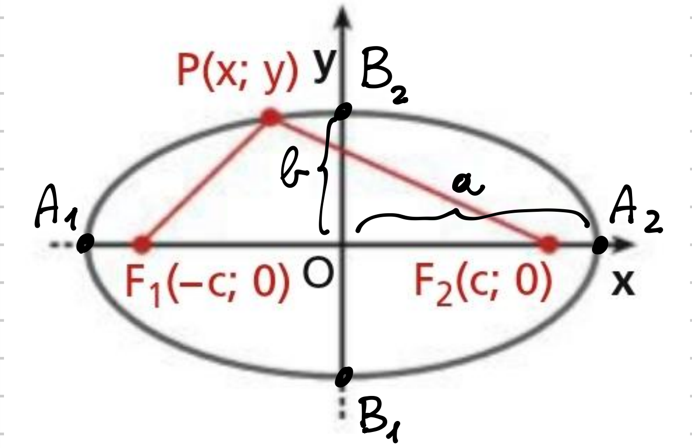
SI PUÒ SE $a^2 - c^2 > 0$



$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

Nel triangolo PF_1F_2, la somma di 2 lati è maggiore del 3° lato

$$2a > 2c$$
$$\Downarrow$$
$$a > c$$
$$\Downarrow$$
$$a^2 > c^2$$



A_1, A_2, B_1, B_2 = VERTICI DELL'ELLISSE

$$A_{1,2} \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = a^2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm a \\ y = 0 \end{cases}$$

$A_1(-a, 0) \quad A_2(a, 0)$

Allo stesso modo $B_1(0, -b) \quad B_2(0, b)$ $\qquad (a^2 - b^2 = c^2)$

OSSERVAZIONE

Durante i passaggi per arrivare all'eq. canonica abbiamo elevato due volte al quadrato. In generale questa operazione aggiunge soluzioni, quindi dobbiamo controllare che l'equazione finale ottenuta sia equivalente a quella di partenza.

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ equaz. di partenza

Se nel procedimento eleviamo 2 volte al quadrato si ha che l'eq. ottenuta sarebbe stata derivabile anche da:

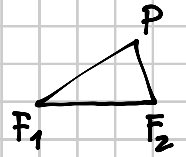
$-\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$

IMPOSSIBILE perché uguaglianza di quantità di segno opposto

$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$

IMPOSSIBILE perché o ancora uguaglianza di quantità di segno opposto, oppure

nel triangolo PF_1F_2



si ha che la differenza di 2 lati è minore del 3° lato: $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} < \overline{F_1F_2}$

$2a < 2c$

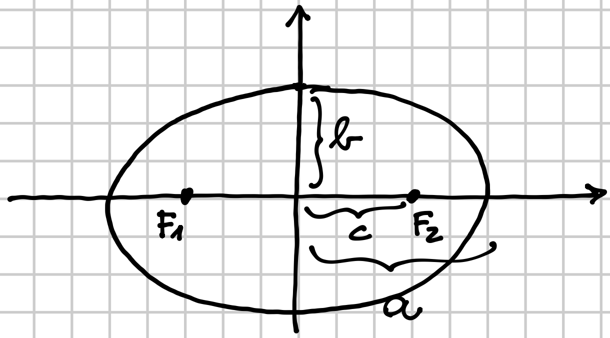
$\Downarrow$

$a < c$

ASSURDO per (*)

$-\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$

IMPOSSIBILE per la stessa ragione



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a > b \qquad b^2 = a^2 - c^2 \quad (c^2 = a^2 - b^2)$

ELLISSE COI FUOCHI SULL'ASSE X
(CENTRO IN $O(0,0)$)

12 $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Determinare le caratteristiche di questa ellisse

$a^2 = 25 \qquad \dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1 \qquad a > b$

$b^2 = 9$

$\Downarrow$

$\begin{cases} a = 5 & \text{SEMIASSE MAGGIORE} \\ b = 3 & \text{SEMIASSE MINORE} \end{cases}$

VERTICI $A_1(-5,0) \quad A_2(5,0)$

$B_1(0,-3) \quad B_2(0,3)$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$

FUOCHI $F_1(-4,0) \quad F_2(4,0)$

ECCENTRICITÀ $e = \dfrac{\text{SEMIDISTANZA FOCALE}}{\text{SEMIASSE MAGGIORE}} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$

$\downarrow$ INDICE DI QUANTO L'ELLISSE SI DISCOSTA DALL'ESSERE UNA CIRCONFERENZA

$e = \dfrac{c}{a} \Rightarrow 0 \le e < 1$

più e si avvicina a 0, più l'ellisse assomiglia a una circonferenza;
più e si avvicina a 1, più l'ellisse ha una forma "schiacciata"

$e = 0 \Rightarrow$ CIRCONFERENZA

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a > b$	$b > a$
a SEMIASSE MAGGIORE	b SEMIASSE MAGGIORE
FUOCHI SULL'ASSE X	FUOCHI SULL'ASSE y
$c^2 = a^2 - b^2$	$c^2 = b^2 - a^2$
$e = \frac{c}{a}$ (eccentricità)	$e = \frac{c}{b}$

19 $16x^2 + y^2 = 4$ → divido per 4

$$4x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$a^2 = \frac{1}{4}$ $\quad b^2 = 4$

$a = \frac{1}{2}$ $\quad b = 2$ (semiasse maggiore) $\Rightarrow$ fuochi sull'asse y

$c = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$ $\quad F_1\left(0, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ $\quad F_2\left(0, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

eccentricità $e = \frac{c}{b} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

35 **a.** $a = 3$, $e = \frac{2}{3}$. $\left[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1\right]$

b. $b = 2$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $[x^2 + 4y^2 = 16]$

Scrivere l'eq. dell'ellisse coi fuochi nell'asse x

a) $a = 3$ $e = \frac{2}{3}$ $e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = e\,a = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$

$b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$

$$\boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1}$$

b) $b = 2$ $e = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Downarrow$

$c = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\Downarrow$

$a^2 = 4 + \frac{3}{4} a^2$

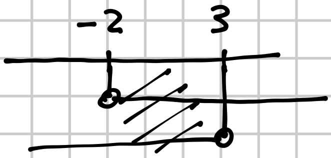
$a^2 - \frac{3}{4} a^2 = 4$

$\frac{1}{4} a^2 = 4$ $a^2 = 16$

$$\boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1}$$

64 Data l'equazione $\frac{x^2}{k+2} + \frac{y^2}{3-k} = 1$, determina i valori da attribuire al parametro k affinché rappresenti un'ellisse. $[-2 < k < 3]$

$$\begin{cases} k+2>0 \\ 3-k>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k>-2 \\ k<3 \end{cases}$$



$$\boxed{-2<k<3}$$

66 È data l'equazione: $\frac{x^2}{k+5} + \frac{y^2}{3k-1} = 1$.

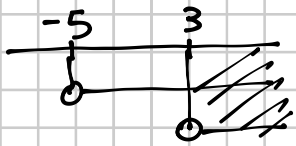
Stabilisci per quali valori del parametro k essa rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse y. $[k > 3]$

$$\begin{cases} k+5>0 \\ 3k-1>0 \\ 3k-1>k+5 \end{cases}$$

($k+5>0$, $3k-1>0$) affinché sia un'ellisse

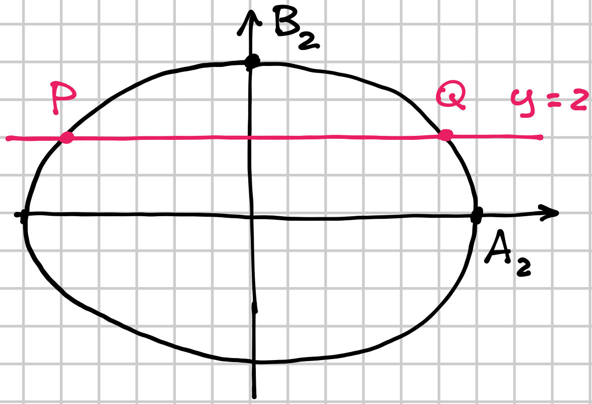
$3k-1>k+5$ affinché sia un'ellisse coi fuochi sull'asse y

$$\begin{cases} k+5>0 \\ 3k-1>k+5 \end{cases} \qquad \begin{cases} k>-5 \\ 2k>6 \end{cases} \qquad \begin{cases} k>-5 \\ k>3 \end{cases} \implies \boxed{k>3}$$



115 Determina l'equazione dell'ellisse avente due vertici in (6; 0) e (0; 4) e calcola la misura della corda individuata sulla retta di equazione $y - 2 = 0$.

$$\left[\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1; 6\sqrt{3}\right]$$



$a = 6 \qquad b = 4$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x^2}{36} + \frac{\cancel{4}^{\,1}}{\cancel{16}_{\,4}} = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{36} = 1 - \frac{1}{4} \qquad \frac{x^2}{\cancel{36}_{\,9}} = \frac{3}{\cancel{4}}$$

$x^2 = 27$

$$\begin{cases} x = \pm 3\sqrt{3} \\ y = 2 \end{cases} \qquad P(-3\sqrt{3}, 2) \quad Q(3\sqrt{3}, 2)$$

$$\overline{PQ} = \left| -3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} \right| = 6\sqrt{3}$$