pg. 485

49 **a.** Scrivi l'equazione dell'ellisse con gli assi paralleli agli assi cartesiani, avente centro di simmetria nel punto (4; 2) e passante per i punti di coordinate (8; 0) e (− 1; 1).

b. Calcola le equazioni delle tangenti nei punti dell'ellisse le cui ordinate sono soluzioni dell'equazione $t^4 - 2t^3 + 2t^2 - t = 0$.

c. Calcola l'area del quadrilatero convesso individuato dalle tangenti trovate.

[a) $x^2 + 3y^2 - 8x - 12y = 0$; b) $2x + 3y = 0$, $2x - 3y - 16 = 0$, $5x + 3y + 2 = 0$, $5x - 3y - 42 = 0$; c) $\frac{28}{3}$]

a) $C(4,2)$ $\quad \frac{(x-4)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1 \quad \frac{1}{a^2} = t \quad \frac{1}{b^2} = u$

$$t(x-4)^2 + u(y-2)^2 = 1$$

passaggio per

$P(8,0)$

$Q(-1,1)$

$$\begin{cases} t(8-4)^2 + u(0-2)^2 = 1 \\ t(-1-4)^2 + u(1-2)^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 16t + 4u = 1 \\ 25t + u = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 16t + 4(1-25t) = 1 \\ u = 1 - 25t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16t + 4 - 100t = 1 \\ \end{cases} \quad \begin{cases} -84t = -3 \\ \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{1}{28} \\ u = 1 - \frac{25}{28} = \frac{3}{28} \end{cases}$$

$$\frac{(x-4)^2}{28} + \frac{3(y-2)^2}{28} = 1$$

$$(x-4)^2 + 3(y-2)^2 - 28 = 0$$

$$x^2 + 16 - 8x + 3(y^2 + 4 - 4y) - 28 = 0$$

$$\boxed{x^2 + 3y^2 - 8x - 12y = 0}$$

b) $t^4 - 2t^3 + 2t^2 - t = 0$

$t(t^3 - 2t^2 + 2t - 1) = 0$

$t^3 - 2t^2 + 2t - 1$ $\qquad 1 \rightarrow 1^3 - 2\cdot 1^2 + 2\cdot 1 - 1 = 0$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & // \end{array}$$

$t(t-1)\underbrace{(t^2 - t + 1)}_{\Delta<0} = 0$ le uniche soluzioni sono 0 e 1

$t = 0 \vee t = 1$

ellisse $x^2 + 3y^2 - 8x - 12y = 0$

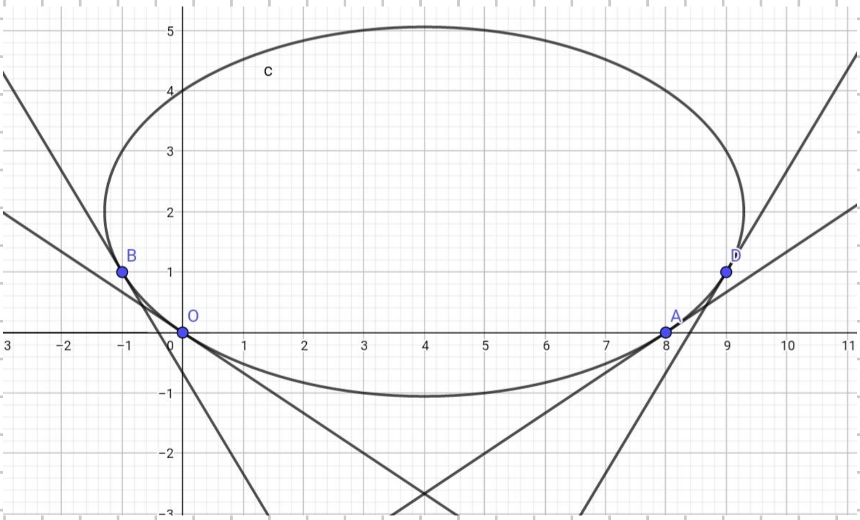
$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 3y^2 - 8x - 12y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 8x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x(x-8) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \vee x = 8 \end{cases}$

$O(0,0) \quad A(8,0)$

$\begin{cases} y = 1 \\ x^2 + 3y^2 - 8x - 12y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ x^2 + 3 - 8x - 12 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ x^2 - 8x - 9 = 0 \end{cases}$

$(x-9)(x+1) = 0$

$\begin{cases} y = 1 \\ x = 9 \vee x = -1 \end{cases}$ $\qquad B(-1,1) \quad D(9,1)$



le tangenti sono a 2 a 2 simmetriche rispetto all'asse verticale dell'ellisse

Tangente in $O(0,0)$ $\quad \begin{cases} y = mx \\ x^2+3y^2-8x-12y=0 \end{cases}$

$$x^2+3m^2x^2-8x-12mx=0$$

$$(1+3m^2)x^2-2(6m+4)x=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=0 \Rightarrow (6m+4)^2=0$$

$$m=-\frac{2}{3}$$

$\boxed{y=-\frac{2}{3}x}$ tangente in O

la tangente in $A(8,0)$, punto simmetrico di O rispetto all'asse verticale dell'ellisse, ha coefficiente angolare $+\frac{2}{3}$

$y-0=\frac{2}{3}(x-8)$ $\quad \boxed{y=\frac{2}{3}x-\frac{16}{3}}$ tangente in A

Tangente in $B(-1,1)$ $\quad \begin{cases} y-1=m(x+1) \\ x^2+3y^2-8x-12y=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y=mx+m+1 \\ x^2+3(mx+m+1)^2-8x-12(mx+m+1)=0 \end{cases}$$

$$x^2+3(m^2x^2+m^2+1+2m^2x+2mx+2m)-8x-12mx-12m-12=0$$

$$x^2+3m^2x^2+3m^2+3+\underline{6m^2x}+\underline{6mx}+6m\underline{-8x}\underline{-12mx}-12m-12=0$$

$$(1+3m^2)x^2+2(3m^2-3m-4)x+3m^2-6m-9=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=0 \quad (3m^2-3m-4)^2-(1+3m^2)(3m^2-6m-9)=0$$

$$(3m^2-3m-4)^2-(1+3m^2)(3m^2-6m-9)=0$$

$$9m^4+9m^2+16-18m^3-24m^2+24m-(3m^2-6m-9+9m^4$$
$$-18m^3-27m^2)=0$$

$$\cancel{9m^4}+9m^2+16-\cancel{18m^3}-\cancel{24m^2}+24m-\cancel{3m^2}+6m+9-\cancel{9m^4}$$
$$+\cancel{18m^3}+\cancel{27m^2}=0$$

$$9m^2+30m+25=0$$

$$(3m+5)^2=0 \implies 3m+5=0 \implies m=-\frac{5}{3}$$

$$y=mx+m+1 \implies y=-\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}+1 \qquad \boxed{y=-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}}$$

tangente in B

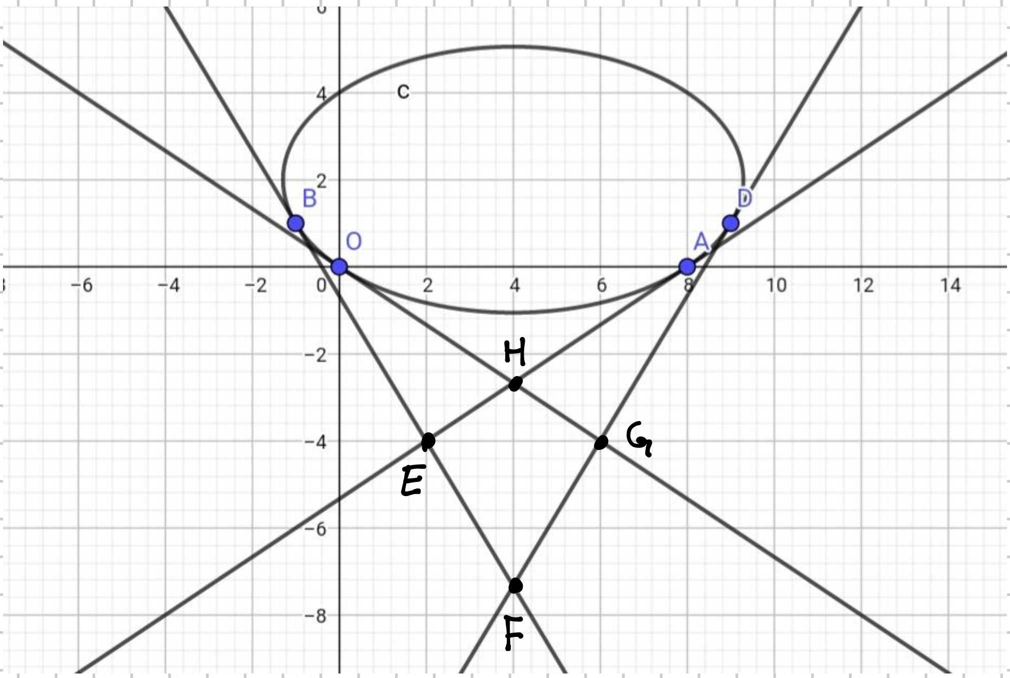
La tangente in $D(9,1)$ ha coeff. angolare $\frac{5}{3}$

$$y-1=\frac{5}{3}(x-9)$$

$$y=\frac{5}{3}x-15+1 \qquad \boxed{y=\frac{5}{3}x-14}$$

tangente in D

c)



$E(2,-4)$

$G(6,-4)$

andrebbero verificati!

$$H = \begin{cases} y = \frac{2}{3}x - \frac{16}{3} \\ y = -\frac{2}{3}x \end{cases} \qquad -\frac{2}{3}x = \frac{2}{3}x - \frac{16}{3} \qquad -4x = -16 \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = -\frac{2}{3}\cdot 4 = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

$H\left(4, -\frac{8}{3}\right)$

$$F = \begin{cases} y = -\frac{5}{3}x - \frac{2}{3} \\ y = \frac{5}{3}x - 14 \end{cases} \qquad \frac{5}{3}x - 14 = -\frac{5}{3}x - \frac{2}{3} \qquad 5x - 42 = -5x - 2$$

$$10x = 40 \qquad x = 4$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{5}{3}\cdot 4 - 14 = \frac{20}{3} - 14 = -\frac{22}{3} \end{cases} \qquad F\left(4, -\frac{22}{3}\right)$$

$$\mathcal{A}_{EFGH} = \frac{1}{2}\overline{EG}\cdot\overline{HF} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\left|-\frac{22}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right)\right| = 2\cdot\left|-\frac{22}{3} + \frac{8}{3}\right| = 2\cdot\frac{14}{3} =$$

$$= \boxed{\frac{28}{3}}$$

AREA DELL'ELLISSE

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

$$\boxed{\mathcal{A}_{ELLISSE} = a\, b\, \pi}$$

Se $a = b = r$, l'ellisse è una circonferenza di raggio r, e la formula produce $\mathcal{A} = r^2\pi$