POTENZE

4/3/2022

• POTENZE A ESPONENTE NATURALE

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

DEFINIZIONE INTUITIVA

$n \in \mathbb{N} \quad x \in \mathbb{R} \qquad x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ fattori}}$

(x e n non contemporaneamente nulli, cioè 0^0 <u>non</u> <u>SI DEFINISCE</u>)

$n = 0 \qquad x^0 = 1 \quad (\text{se } x \neq 0)$

$n = 1 \qquad x^1 = x$

<u>DEFINIZIONE FORMALE</u> $\Rightarrow$

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ x \cdot x^{n-1} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

$x \neq 0$

ad es. per calcolare 5^3 si fa

$$5 \cdot 5^2 =$$
$$= 5 \cdot (5 \cdot 5^1) =$$
$$= 5 \cdot (5 \cdot (5 \cdot 5^0)) =$$
$$= 5 \cdot (5 \cdot (5 \cdot 1))$$

• POTENZE A ESPONENTE INTERO

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$n \geq 0 \Rightarrow$ come prima

$n < 0 \qquad x^n = \dfrac{1}{x^{-n}} \quad (x \neq 0) \qquad$ ad es. $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3}$

infatti $5^3 \cdot 5^{-3} = 5^{3-3} = 5^0 = 1 \Rightarrow 5^{-3} = \dfrac{1}{5^3}$

• POTENZE A ESPONENTE RAZIONALE $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$

$x > 0$

$n, m \in \mathbb{N}$

$m \neq 0$

$$x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \quad \text{ad es.} \quad 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$5^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{5^7}$$

$$x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} \qquad \pi^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\pi^3}}$$

OSSERVAZIONE = si prendono basi $x > 0$ perché per basi negative ci sarebbero problemi:

$$2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{6}} \quad \text{ma} \quad (-2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2} < 0$$

$$(-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} > 0$$

RISULTATI OPPOSTI

quindi NON prendiamo in considerazione basi negative (o nulle) per potenze a esponente razionale

Con tutte queste definizioni valgono le solite proprietà delle potenze:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

- **POTENZE A ESPONENTE REALE**

Quando l'esponente è IRRAZIONALE, come si definisce tale potenza?

es. $3^{\sqrt{2}}$ che significato ha?

1,4	1,41	1,414	1,4142	…	per difetto;
1,5	1,42	1,415	1,4143	…	per eccesso.

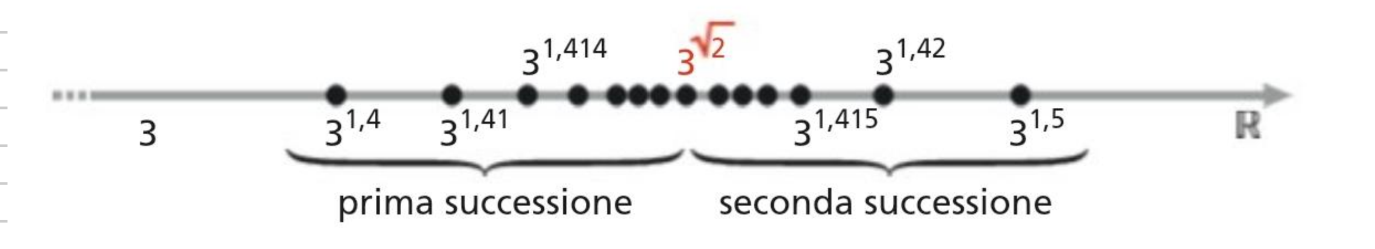
APPROSSIMAZIONI RAZIONALI SUCCESSIVE DI $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ è l'UNICO numero che viene "ingabbiato" da queste due successioni

$3^{1,4}$	$3^{1,41}$	$3^{1,414}$	$3^{1,4142}$	…
$3^{1,5}$	$3^{1,42}$	$3^{1,415}$	$3^{1,4143}$	…

SUCCESSIONI DI POTENZE A ESPONENTE RAZIONALE

Definisco $3^{\sqrt{2}}$ come il numero (che si può dimostrare esistere e essere unico) che viene "ingabbiato" da queste due successioni



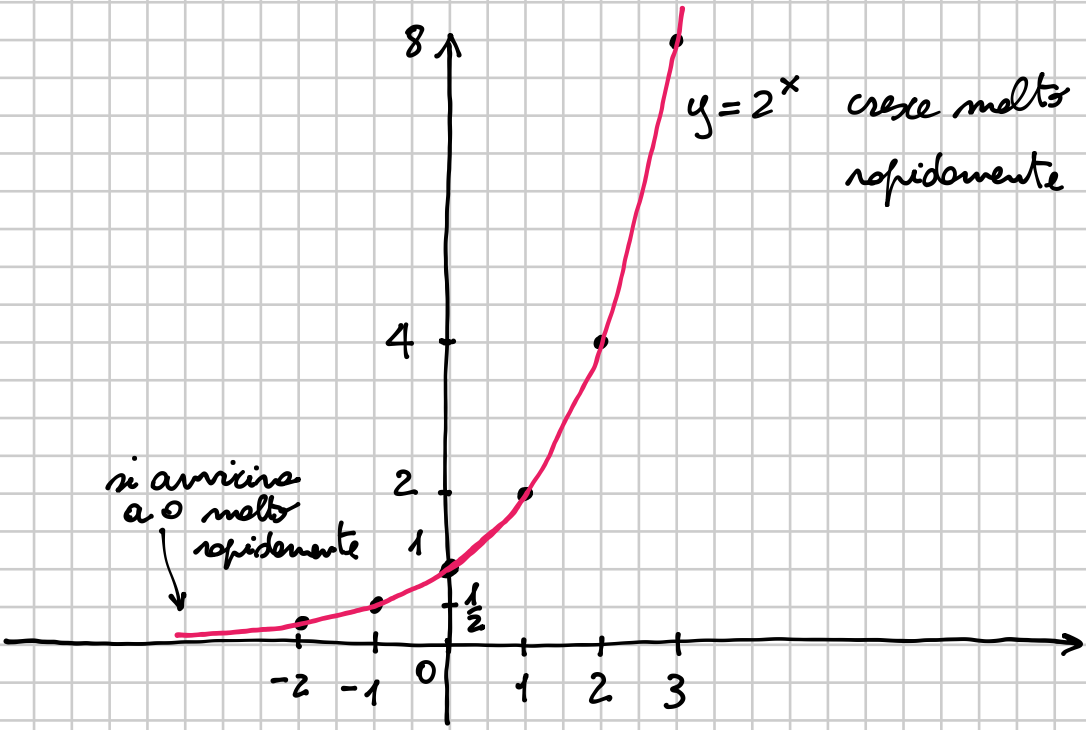
Tutto questo per dire che, presa una base >0 (ad es. 2), esiste sempre 2^x con $x \in \mathbb{R}$ qualsiasi.

Quindi posso considerare la funzione

$$x \mapsto 2^x \qquad x \in \mathbb{R}$$

cioè la funzione di dominio $\mathbb{R}$ che ad ogni $x \in \mathbb{R}$ associa 2^x.
Essa si chiama FUNZIONE ESPONENZIALE di base 2

x	$y = 2^x$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
....	....
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
....	....



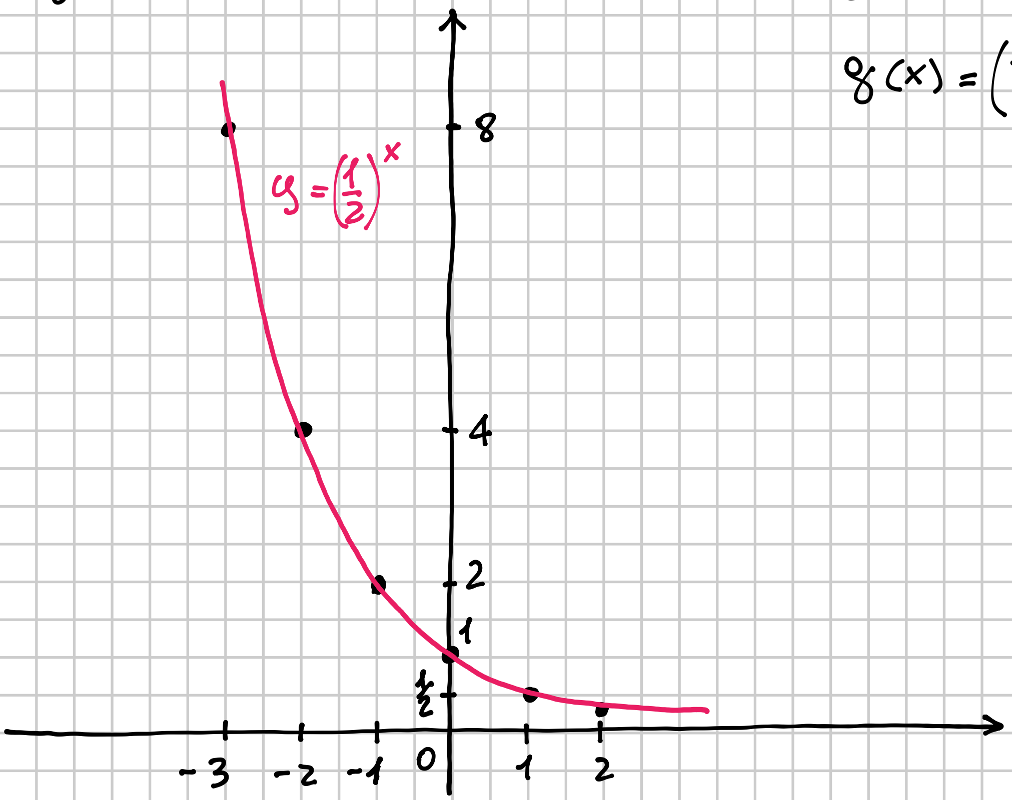
FUNZIONE STRETT. CRESCENTE E STRETT. POSITIVA

$$2^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Costruiamo il grafico della funzione esponenziale $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
-1	2
-2	4
-3	8
...	...

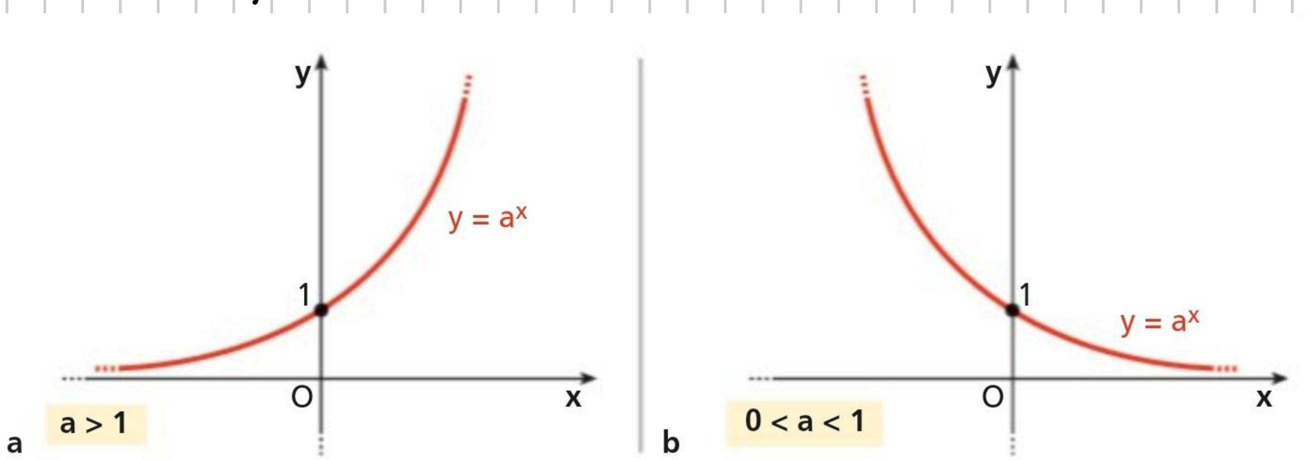


$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ quindi il grafico è il simmetrico di $y = 2^x$ rispetto all'asse y

DEFINIZIONE

Dato $a \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ e $a \neq 1$, si chiama FUNZIONE ESPONENZIALE DI BASE a la funzione

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = a^x$$

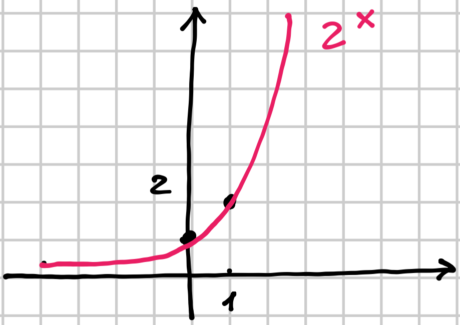


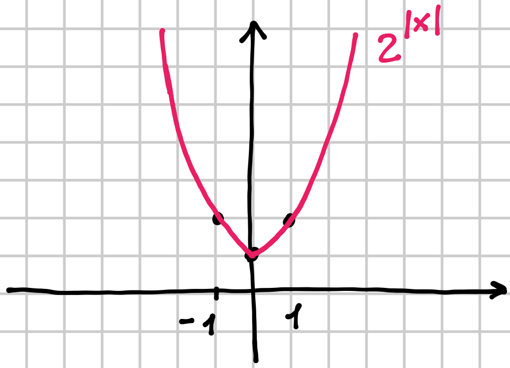
TEOREMA IMPORTANTE = $\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x > 0 \qquad (a > 0)$

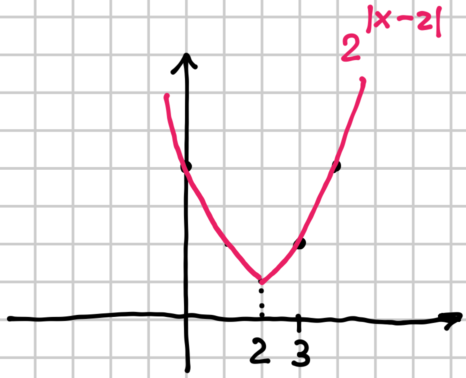
112 $y = 2^{|x-2|}$;

Disegnare il grafico con le trasformazioni elementari

$2^x \to 2^{|x|} \to 2^{|x-2|}$







$y = 2^{|x|-2}$.

$2^x \to 2^{x-2} \to 2^{|x|-2}$