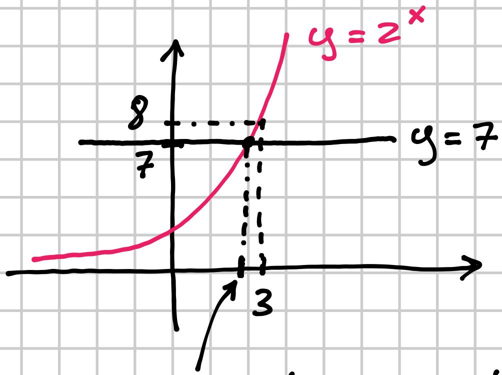
2/5/2022

LA FUNZIONE LOGARITMICA

$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$ eq. esponenziali semplici che sappiamo risolvere

$2^x = 7$ come trovare un esponente x tale che $2^x = 7$?



è questo numero l'esponente da dare a 2 per ottenere 7

GRAFICAMENTE la soluzione esiste!

A questa soluzione diamo il nome LOGARITMO (IN BASE 2) DI 7 e scriviamo $\log_2 7$

In definitiva:

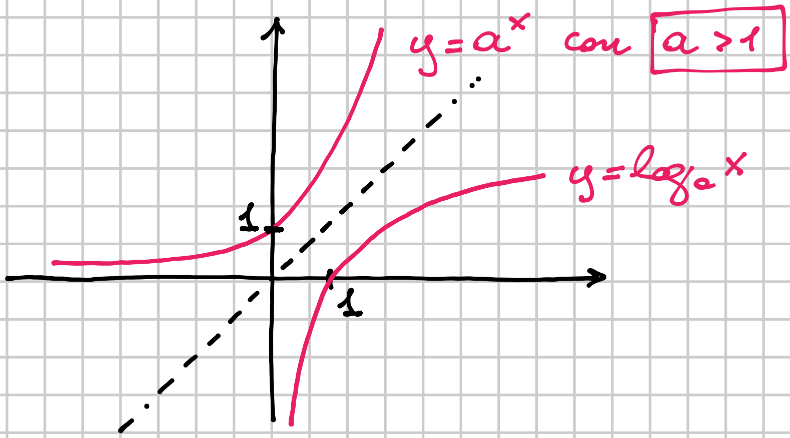
dati $a > 0$ $a \neq 1$ e un numero positivo $x > 0$
↓
BASE

si dice che $\log_a x = y$ sse $a^y = x$

La funzione $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è l'inversa della funzione esponenziale a^x.
Ciò significa appunto che:

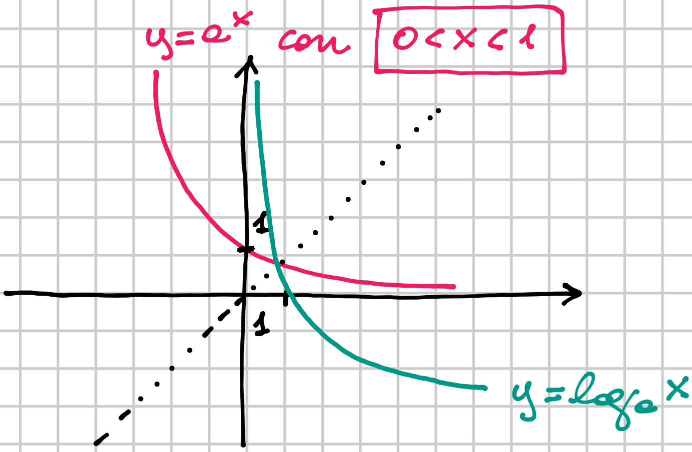
$$a^x = y \Leftrightarrow \log_a(a^x) = \log_a y \Leftrightarrow x = \log_a y$$

$$2^x = 7 \Leftrightarrow \log_2(2^x) = \log_2 7 \Leftrightarrow x = \log_2 7$$



il DOMINIO della funzione logaritmo è $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$

inoltre $\log_a 1 = 0$ (SEMPRE)



Se $a=1$, la funzione esponenziale $y = 1^x = 1$ NON è invertibile (perché non iniettiva), per cui $\log_1$ NON esiste!

ESEMPI

1) $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

2) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{27}} = \log_3 3^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$

3) $\log_5 31$ si lascia scritto così

4) $\log_{18} 1 = 0$ perché $18^0 = 1$

5) $\log_2 (-7)$ NON ESISTE perché $-7 < 0$

6) $\log_2 0$ NON ESISTE perché l'argomento deve essere > 0

Come regola si può ricordare che

$$\log_a x = y \iff a^y = x \qquad a>0, a \neq 1, x>0$$

Osserviamo che

- $\log_a a = 1$ perché $a^1 = a$
- $a^{\log_a x} = x$ perché $\log_a x$ è proprio l'esponente da dare ad a per ottenere x

  (inoltre l'esponenziale in base a e il logaritmo in base a sono l'uno l'inverso dell'altro)

La funzione logaritmica è iniettiva (come l'esponenziale), per cui

$$\log_a x = \log_a y \iff x = y$$

IN BASE 10

25 $\log_2(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2})$; $\qquad \log \dfrac{1}{\sqrt[13]{10}}$.

$$\log_2(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}) = \log_2(2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}) = \log_2 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \log_2 2^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$$

$$\log \frac{1}{\sqrt[13]{10}} = \log 10^{-\frac{1}{13}} = -\frac{1}{13}$$

30 $\log_{625} \frac{\sqrt[3]{5}}{25}$; $\log_{16} \frac{2}{\sqrt[7]{2}}$.

$$\log_{625} \frac{\sqrt[3]{5}}{25} = \log_{625} \frac{5^{\frac{1}{3}}}{5^2} = \log_{625} 5^{\frac{1}{3}-2} =$$

$$= \log_{625} 5^{-\frac{5}{3}} = \log_{625} \left(625^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{5}{3}} = \log_{625} 625^{-\frac{5}{12}} = -\frac{5}{12}$$

$$625 = 5^4 \Rightarrow 5 = 625^{\frac{1}{4}}$$