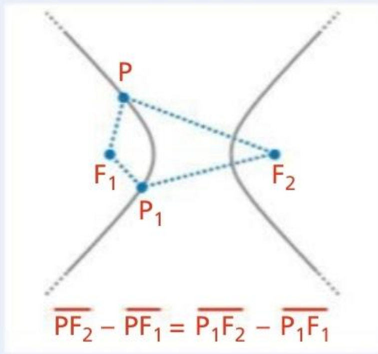
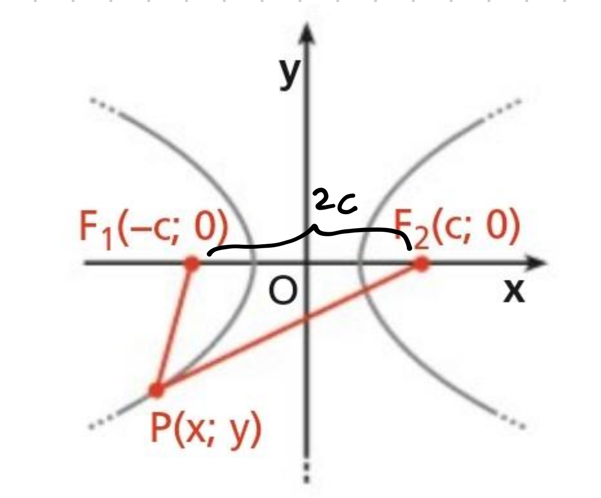
Iperbole come luogo geometrico

DEFINIZIONE
Assegnati nel piano due punti, F_1 e F_2, si chiama **iperbole** il luogo geometrico dei punti P del piano che hanno costante la differenza delle distanze da F_1 e da F_2:

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = \textbf{costante}.$$



F_1 F_2 FUOCHI



$F_1(-c,0) \qquad F_2(c,0)$

$2c$ = DISTANZA FOCALE

c = SEMIDISTANZA FOCALE

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$$

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$$

$2c > 2a \Rightarrow c > a$
perché in un triangolo la diff. di due lati è minore del 3° lato

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+\cancel{y^2} = 4a^2 + (x-c)^2+\cancel{y^2} \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{c^2}+2cx = 4a^2+\cancel{x^2}+\cancel{c^2}-2cx \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$c^2x^2 + a^4 - 2a^2cx = a^2\left[x^2+c^2-2cx+y^2\right]$$

$$c^2x^2 + a^4 - 2a^2cx = a^2\left[x^2 + c^2 - 2cx + y^2\right]$$

$$c^2x^2 + a^4 - \cancel{2a^2cx} = a^2x^2 + a^2c^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

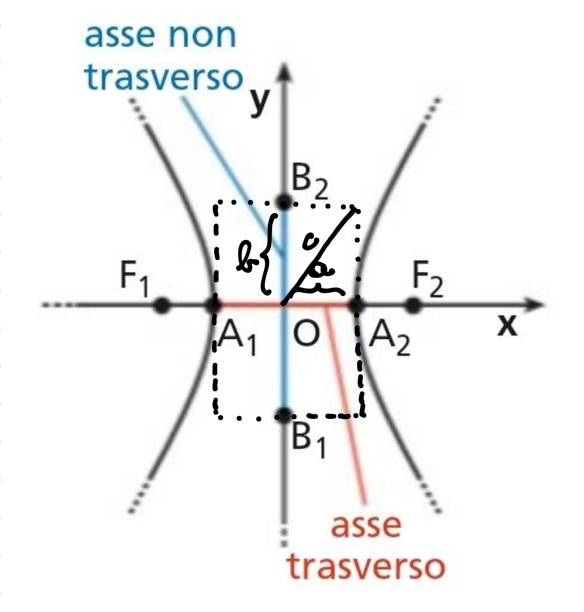
$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \qquad c^2 - a^2 = b^2$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

↓ divido per a^2b^2

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

con $c^2 = a^2 + b^2$

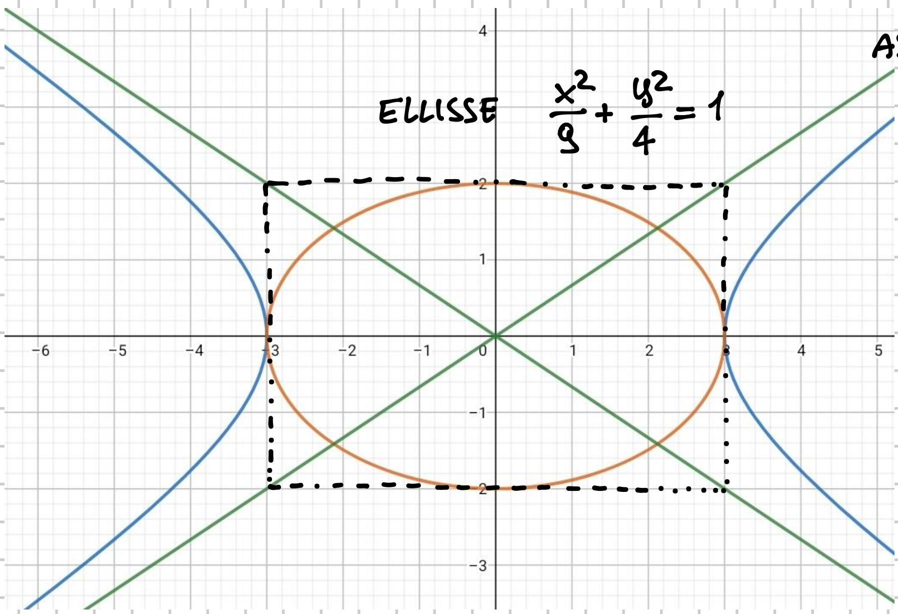


$A_1(-a, 0) \quad A_2(a, 0)$

VERTICI DELL'IPERBOLE

a = SEMIASSE TRASVERSO

b = SEMIASSE NON TRASVERSO



ASINTOTO $y = \frac{2}{3}x$

IPERBOLE $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

$\Downarrow$

ASINTOTI $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0$

ASINTOTO $y = -\frac{2}{3}x$

ASINTOTI $y = \pm \frac{2}{3} x$ $\quad y^2 = \frac{4}{9} x^2$

$$\frac{4}{9} x^2 - y^2 = 0$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0$$

Se parto dall'equazione dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \qquad y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$$

$$y^2 = \frac{b^2(x^2 - a^2)}{a^2}$$

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \simeq \pm \frac{b}{a} x$$

quando $x \to \pm\infty$

$y = \pm \frac{b}{a} x$ ASINTOTI DELL'IPERBOLE