17/5/2022

194 Trova l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse y che è tangente alla retta di equazione $x-2\sqrt{3}\,y+4=0$ nel suo punto di coordinate $(2;\sqrt{3})$.

$$\left[\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=-1\right]$$

$P(2,\sqrt{3})$ è un punto dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

$\frac{1}{a^2}=\alpha \quad \frac{1}{b^2}=\beta$

$\Downarrow$

$\alpha x^2-\beta y^2=-1$

passaggio per $P(2,\sqrt{3}) \Rightarrow 4\alpha-3\beta=-1 \qquad \alpha=\frac{3\beta-1}{4}$

$$\frac{3\beta-1}{4}x^2-\beta y^2+1=0$$

$$\begin{cases}(3\beta-1)x^2-4\beta y^2+4=0\\ x=2\sqrt{3}y-4\end{cases}$$

tangente a $x-2\sqrt{3}y+4=0$

$x=2\sqrt{3}y-4$

$$(3\beta-1)(2\sqrt{3}y-4)^2-4\beta y^2+4=0$$

$$(3\beta-1)(12y^2+16-16\sqrt{3}y)-4\beta y^2+4=0$$

$$\underline{36\beta y^2}+48\beta-48\sqrt{3}\beta y-\underline{12y^2}-16+16\sqrt{3}y\underline{-4\beta y^2}+4=0$$

$$(32\beta-12)y^2+2(8\sqrt{3}-24\sqrt{3}\beta)y+48\beta-12=0$$

$\frac{\Delta}{4}=0 \qquad (8\sqrt{3}-24\sqrt{3}\beta)^2-(32\beta-12)(48\beta-12)=0$

$$192+1728\beta^2-1152\beta-1536\beta^2+384\beta+576\beta-144=0$$

$$192 + 1728\beta^2 - 1152\beta - 1536\beta^2 + 384\beta + 576\beta - 144 = 0$$

$$192\beta^2 - 192\beta + 48 = 0$$

$$4\beta^2 - 4\beta + 1 = 0 \qquad (2\beta - 1)^2 = 0$$

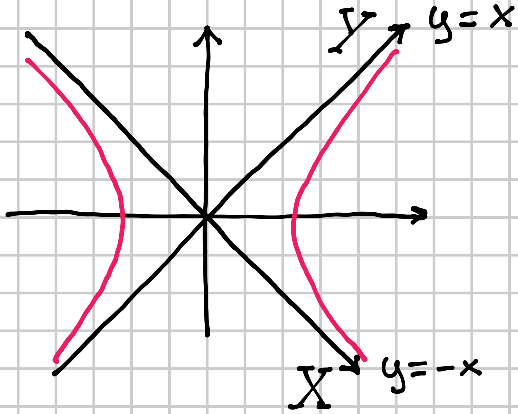
$$\beta = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{3\beta - 1}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{3}{2} - 1}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\alpha x^2 - \beta y^2 = -1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = -1}$$

IPERBOLE EQUILATERA

ASINTOTI PERPENDICOLARI



$\frac{b}{a} = 1 \Rightarrow a = b$

ECCENTRICITÀ

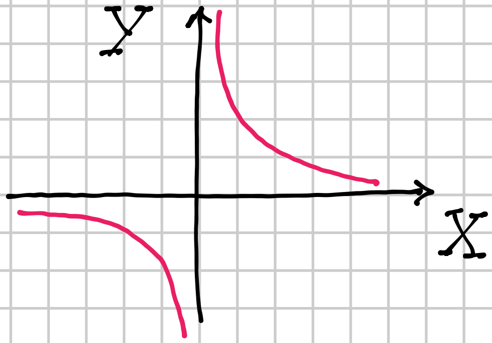
$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} =$

$= \frac{\sqrt{2a^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}\,\cancel{a}}{\cancel{a}} = \sqrt{2}$

$x^2 - y^2 = a^2$ (fuochi sull'asse x)

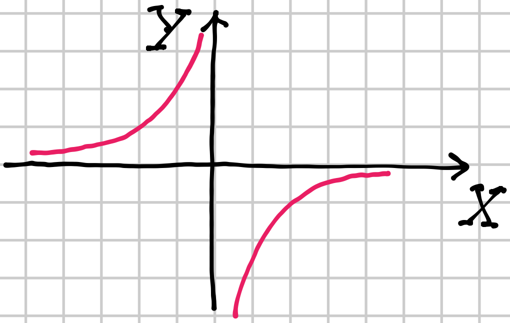
$x^2 - y^2 = -a^2$ (fuochi sull'asse y)

In questo caso l'iperbole può essere riferita agli asintoti



equazione in questo riferimento $Y = \frac{K}{X}$

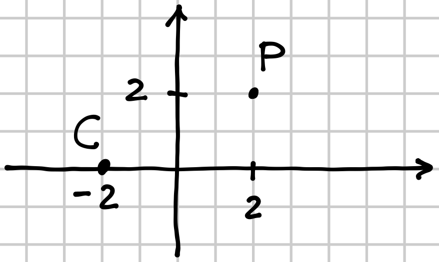
con $K = \frac{a^2}{2}$



$Y = -\frac{K}{X}$

302 Trova l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti, passante per il punto $P(2; 2)$. Determina l'equazione della retta passante per P e $C(-2; 0)$ e trova l'ulteriore intersezione S fra la retta e l'iperbole.

$\left[xy = 4; \; y = \frac{1}{2}x + 1; \; S(-4; -1)\right]$



eq. $xy = K$ con $K > 0$

$P(2,2) \Rightarrow 2 \cdot 2 = K$

$\Downarrow$

$K = 4$

equat. $\boxed{xy = 4}$

$P(2,2) \quad C(-2,0)$

$$\frac{y-2}{0-2} = \frac{x-2}{-2-2} \qquad \frac{y-2}{-2} = \frac{x-2}{-4} \qquad y-2 = \frac{x-2}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + 1}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ xy = 4 \end{cases} \Rightarrow x\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = 4 \qquad \frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x+4)(x-2) = 0$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = -4$$

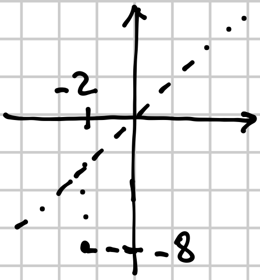
$\Downarrow$

$$y = \frac{4}{x} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$\boxed{S(-4, -1)}$$

303 Dopo aver determinato l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita agli asintoti, che passa per il punto $A(-2; -8)$, trova le equazioni delle rette tangenti nei vertici.

$[xy = 16; y = -x \pm 8]$



$xy = k \qquad k > 0$

$A(-2,-8) \Rightarrow (-2)\cdot(-8) = k \qquad k = 16 \qquad \boxed{xy = 16}$

VERTICI $\begin{cases} y = x \\ xy = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x \\ x^2 = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \pm 4 \\ x = \pm 4 \end{cases} \quad V_1(-4,-4) \quad V_2(4,4)$

tangente per $V_1(-4,-4)$

$y + 4 = m(x+4) \qquad \begin{cases} y = mx + 4m - 4 \\ xy = 16 \end{cases}$

$x(mx + 4m - 4) - 16 = 0$

$mx^2 + 4mx - 4x - 16 = 0$

$mx^2 + 2(2m-2)x - 16 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 0 \qquad (2m-2)^2 + 16m = 0$

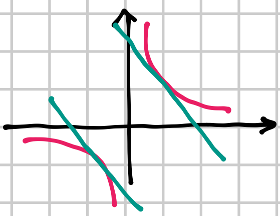
$4m^2 + 4 - 8m + 16m = 0$

$4m^2 + 8m + 4 = 0$

$(2m+2)^2 = 0 \qquad m = -1$

tangente in $V_1(-4,-4)$

$y + 4 = -x - 4 \qquad \boxed{y = -x - 8}$



$V_2(4,4) \quad y - 4 = -(x-4)$

sempre -1

$\boxed{y = -x + 8}$

Per simmetria nell'altro vertice la tangente è parallela a questa

304 Trova l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita agli asintoti, che stacca sulla retta di equazione $y = -2x + 1$ una corda che misura $\frac{7}{2}\sqrt{5}$.

$[xy = -6]$

$xy = \underbrace{K}_{\text{DA TROVARE!!}}$

$$\begin{cases} xy = K \\ y = -2x+1 \end{cases}$$

trovo due punti di intersezione che dipendono da K

$$x(-2x+1) = K$$

$$-2x^2 + x - K = 0$$

$$2x^2 - x + K = 0$$

$\Delta = 1 - 8K > 0$

$K < \frac{1}{8}$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-8K}}{4}$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{1-8K}}{4}$$

$$y_1 = -2x_1 + 1 = -\cancel{2}\,\frac{1-\sqrt{1-8K}}{\cancel{4}\,2} + 1 = \frac{-1+\sqrt{1-8K}+2}{2} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{1-8K}}{2}$$

$$P_1\left(\frac{1-\sqrt{1-8K}}{4}, \frac{1+\sqrt{1-8K}}{2}\right)$$

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{1-8K}}{4}$$

$$y_2 = -2x_2 + 1 = -\cancel{2}\,\frac{1+\sqrt{1-8K}}{\cancel{4}\,2} + 1 = \frac{-1-\sqrt{1-8K}+2}{2} =$$

$$= \frac{1-\sqrt{1-8K}}{2}$$

$$P_2\left(\frac{1+\sqrt{1-8K}}{4}, \frac{1-\sqrt{1-8K}}{2}\right)$$

$$P_1\left(\frac{1-\sqrt{1-8k}}{4}, \frac{1+\sqrt{1-8k}}{2}\right) \qquad P_2\left(\frac{1+\sqrt{1-8k}}{4}, \frac{1-\sqrt{1-8k}}{2}\right)$$

$k < \frac{1}{8}$ impongo che $\overline{P_1P_2} = \frac{7}{2}\sqrt{5}$ $\qquad \overline{P_1P_2}^2 = \frac{49}{4}\cdot 5 = \frac{245}{4}$

$$\left(\frac{1-\sqrt{1-8k}}{4} - \frac{1+\sqrt{1-8k}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{1-8k}}{2} - \frac{1-\sqrt{1-8k}}{2}\right)^2 = \frac{245}{4}$$

$$\left(\frac{\cancel{1}-\sqrt{1-8k} \cancel{-1}-\sqrt{1-8k}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\cancel{1}+\sqrt{1-8k} \cancel{-1}+\sqrt{1-8k}}{2}\right)^2 = \frac{245}{4}$$

$$\left(\frac{-\cancel{2}\sqrt{1-8k}}{\cancel{4}_{\,2}}\right)^2 + \left(\frac{\cancel{2}\sqrt{1-8k}}{\cancel{2}}\right)^2 = \frac{245}{4}$$

$$\frac{1-8k}{4} + 1-8k = \frac{245}{4}$$

$$\frac{1-8k+4-32k}{\cancel{4}} = \frac{245}{\cancel{4}} \qquad -40k = 240$$

$k = -6$ ACCETTABILE PERCHÉ $< \frac{1}{8}$

IPERBOLE EQUILATERA RIFERITA AI SUOI ASINTOTI $\boxed{xy = -6}$