30/5/2022

93 Sono date le funzioni $f(x)=\sqrt{3^{\frac{x}{2}}+3^x-2}$ e $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x+1)$.

a. Determina il dominio D_f di $f(x)$ e il dominio D_g di $g(x)$.

b. Trova quale valore assume $f(x)$ per $x=\log_3 4$.

c. Calcola i valori di x per cui è $g(x)>-\log_2 3$.

d. Considerata la funzione $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, studiane il dominio e trova gli zeri.

[a) D_f: $x\geq 0$, D_g: $\mathbb{R}$; b) 2; c) $-1<x<2$; d) D: $x>0 \land x\neq 1$; non ci sono zeri]

a) $f(x)=\sqrt{3^{\frac{x}{2}}+3^x-2}$ $\qquad D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid 3^{\frac{x}{2}}+3^x-2\geq 0\}$

$3^{\frac{x}{2}}+3^x-2\geq 0$ $\qquad t=3^{\frac{x}{2}}$

$t+t^2-2\geq 0$

$t^2+t-2\geq 0 \qquad (t+2)(t-1)\geq 0 \qquad t\leq -2 \lor t\geq 1$

$3^{\frac{x}{2}}\leq -2 \lor 3^{\frac{x}{2}}\geq 1$

IMPOSS.

$\Downarrow$

$\frac{x}{2}\geq 0$

$\Downarrow$

$x\geq 0$

quindi $D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 0\}=[0,+\infty)$

$g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x+1) \qquad D_g=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-x+1>0\}$

$x^2-x+1>0$

$\Delta=1-4=-3 \Rightarrow x\in\mathbb{R}$ $\qquad$ quindi $D_g=\mathbb{R}$

$(\forall x)$

b) $f(x)=\sqrt{3^{\frac{x}{2}}+3^{x}-2}$ $\qquad x=\log_3 4$

$$f(\log_3 4)=\sqrt{3^{\frac{\log_3 4}{2}}+3^{\log_3 4}-2}=\sqrt{3^{\frac{\log_3 2^2}{2}}+4-2}=$$

$$=\sqrt{3^{\frac{\cancel{2}\log_3 2}{\cancel{2}}}+2}=\sqrt{3^{\log_3 2}+2}=\sqrt{2+2}=$$

$$=\sqrt{4}=2$$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x+1)>-\log_2 3$ $\qquad$ C.E. $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\frac{\log_2(x^2-x+1)}{\underbrace{\log_2\frac{1}{2}}_{-1}}>-\log_2 3$$

$$-\log_2(x^2-x+1)>-\log_2 3$$

$$\log_2(x^2-x+1)<\log_2 3$$

$$x^2-x+1<3 \qquad x^2-x-2<0$$

$$(x-2)(x+1)<0$$

$$-1<x<2$$

d) $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\qquad y = \frac{\sqrt{3^{\frac{x}{2}} + 3^x - 2}}{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 1)}$

$$\begin{cases} 3^{\frac{x}{2}} + 3^x - 2 \geq 0 \\ x^2 - x + 1 > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 1) \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \\ x^2 - x + 1 \neq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \\ x^2 - x \neq 0 \end{cases}$$

il log è uguale a 0
quando l'argomento è 1

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x(x-1) \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 0 \land x \neq 1 \end{cases}$$

$x > 0 \land x \neq 1$

$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \land x \neq 1\}$

$D_{\frac{f}{g}} = (0,1) \cup (1, +\infty)$

Dobbiamo risolvere $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ (nel suo dominio)

$$\frac{\sqrt{3^{\frac{x}{2}} + 3^x - 2}}{\cancel{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 1)}} = 0 \implies \sqrt{3^{\frac{x}{2}} + 3^x - 2} = 0 \implies 3^{\frac{x}{2}} + 3^x - 2 = 0$$

$t = 3^{\frac{x}{2}}$

$t + t^2 - 2 = 0$

$t^2 + t - 2 = 0$

$(t+2)(t-1) = 0$

$t = -2 \lor t = 1$

$3^{\frac{x}{2}} = -2$ IMPOSS. $\lor$ $3^{\frac{x}{2}} = 1$

$\frac{x}{2} = 0 \implies x = 0$

N.A.
perché non è nel dominio

NON CI SONO ZERI