19/10/2021

59 ◆◆◆ **PROBLEMA A PASSI**

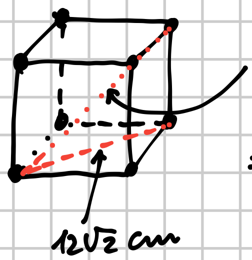
Otto cariche Q uguali sono situate ai vertici di un cubo di lato $L = 12$ cm posto nel vuoto. Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie sferica di raggio $r = 14$ cm e centro coincidente con quello del cubo (cioè, nel punto di incontro delle diagonali del cubo) è pari a $\Phi = 1{,}6 \times 10^4\ \mathrm{N \cdot m^2/C}$.

▸ Calcola il valore di Q.

▸ Calcola il flusso del campo elettrico attraverso una superficie sferica di raggio $r = 14$ cm con centro nel punto medio di uno spigolo del cubo.

[$1{,}8 \times 10^{-8}$ C; $1{,}2 \times 10^4\ \mathrm{N \cdot m^2/C}$]

1. Per il primo quesito, calcola la distanza tra il centro del cubo e i vertici, per stabilire se i vertici sono all'interno della superficie sferica.
2. Applica il teorema di Gauss per trovare il valore della carica Q.
3. Per il secondo quesito, calcola la distanza del punto medio di uno spigolo da ciascun vertice; fai attenzione, adesso le distanze non sono tutte uguali.
4. Applica il teorema di Gauss per calcolare il flusso.



$$\sqrt{(12\sqrt{2})^2 + 12^2} = \sqrt{12^2 \cdot 2 + 12^2} = 12\sqrt{3}\ \text{cm}$$

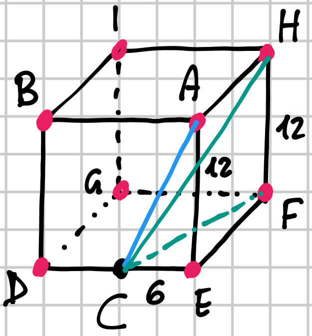
distanza di ogni carica dal centro del cubo è $6\sqrt{3}$ cm $\simeq 10{,}39$ cm < 14 cm $\Rightarrow$ tutte le cariche sono contenute nella sfera (se una fosse fuori, sarebbero fuori tutte per simmetria e il flusso sarebbe nullo)

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{8Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Downarrow$$

$$Q = \frac{\Phi \cdot \varepsilon_0}{8} = \frac{\left(1{,}6 \times 10^4\ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C}}\right)\left(8{,}854 \times 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{N \cdot m^2}}\right)}{8} =$$

$$= 1{,}7708 \times 10^{-8}\ \mathrm{C} \simeq \boxed{1{,}8 \times 10^{-8}\ \mathrm{C}}$$



$$\overline{AC} = \sqrt{6^2+12^2}\ \text{cm} = \sqrt{6^2+2^2\cdot 6^2}\ \text{cm} =$$

$$= 6\sqrt{1+2^2}\ \text{cm} = 6\sqrt{5}\ \text{cm} < 14\ \text{cm}$$

$$6\sqrt{5} \overset{?}{<} 14$$

$$36\cdot 5 < 196$$

$$180 < 196 \quad \text{ok.}$$

Le cariche in A, B, D, E, F, G sono interne alla sfera.

$$\overline{CF} = 6\sqrt{5}\ \text{cm} \qquad \overline{CH} = \sqrt{(6\sqrt{5})^2+12^2} = \sqrt{6^2\cdot 5 + 6^2\cdot 2^2} = 6\sqrt{9} = 18\ \text{cm}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{CH} > 14\ \text{cm}$$

Le cariche in I e H sono esterne alla sfera

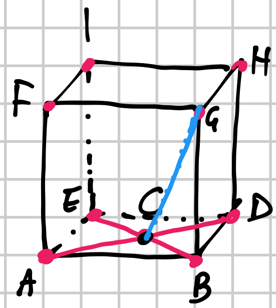
$$\Phi_{S'}(\vec{E}) = \frac{6Q}{\varepsilon_0} = \frac{6}{8}\ \overbrace{\frac{8Q}{\varepsilon_0}}^{\text{flusso di prima } \Phi_S(\vec{E})} =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot \Phi_S(\vec{E}) = \frac{3}{4}\cdot\left(1,6\times 10^4\ \frac{N\cdot m^2}{C}\right) = \boxed{1,2\times 10^4\ \frac{N\cdot m^2}{C}}$$

60 ◆◆◆ **ORA PROVA TU** Otto cariche uguali di valore q sono situate ai vertici di un cubo di lato $L = 10$ cm posto nel vuoto. Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie sferica di raggio $r = 9{,}5$ cm e centro nel punto di incontro delle diagonali di una delle facce del cubo è $\Phi = 2{,}3 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$. Determina

- il valore della carica q;
- il flusso del campo elettrico attraverso la superficie della sfera inscritta nel cubo;
- il flusso del campo elettrico attraverso una superficie sferica con centro in uno dei vertici del cubo e raggio $r = 15$ cm.

[5,1 nC; 0 N · m²/C; 4,0 × 10³ N · m²/C]



$d_{FACCIA} = 10\sqrt{2}$ cm

$\overline{CA} = 5\sqrt{2}$ cm $< 9{,}5$ cm

le cariche in A, B, D, E sono interne

1) $\overline{CG} = \sqrt{\overline{CB}^2 + \overline{GB}^2} = \sqrt{50 + 100}$ cm $= \sqrt{150}$ cm $> 9{,}5$ cm

le cariche in I, H, F, G sono esterne

$$\Phi = \frac{4q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \quad q = \frac{\varepsilon_0 \Phi}{4} = \frac{\left(8{,}854 \times 10^{-12}\ \frac{C^2}{N \cdot m^2}\right)\left(2{,}3 \times 10^3\ \frac{N \cdot m^2}{C}\right)}{4}$$

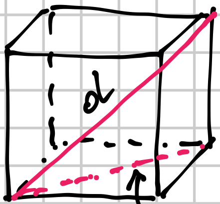
$$= 5{,}091\ldots \times 10^{-9}\ C \simeq \boxed{5{,}1 \times 10^{-9}\ C}$$

2) Se considero la sfera inscritta nel cubo, le cariche nei vertici sono tutte esterne $\Rightarrow \Phi = 0$

3) Prendiamo A come centro della sfera: B, E, F sicuramente interne

controllo se G è interna: $\overline{AG} = 10\sqrt{2}$ cm $\simeq 14{,}1$ cm < 15 cm

G, D, I sono interne. Rimane da controllare H:



$l\sqrt{2}$ $\quad d = \sqrt{l^2 + 2l^2} = l\sqrt{3}$

$\overline{AH} = 10\sqrt{3}$ cm > 15 cm

$\Downarrow$

H è esterna

Siccome nella sfera sono presenti 7 cariche, il flusso è dato da

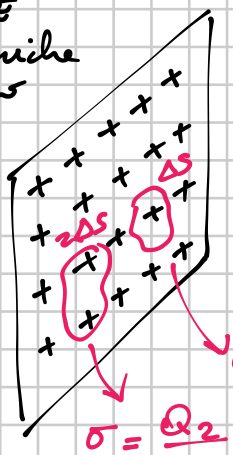
$$\Phi' = \frac{7}{4}\,\Phi = \frac{7}{4}\left(2{,}3\times10^{3}\ \frac{N\cdot m^2}{C}\right) = 4{,}025\times10^{3}\ \frac{N\cdot m^2}{C}$$

questo flusso si riferisce a 4 cariche interne

$$\simeq \boxed{4{,}0\times10^{3}\ \frac{N\cdot m^2}{C}}$$

CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UNA DISTRIBUZIONE PIANA UNIFORME DI CARICHE

DISTRIBUZIONE PIANA: le cariche si dispongono su un piano infinito



$\sigma = \frac{Q_1}{\Delta S}$

$\sigma = \frac{Q_2}{2\Delta S}$ sono uguali, per cui $Q_2 = 2Q_1$

DISTRIBUZIONE UNIFORME

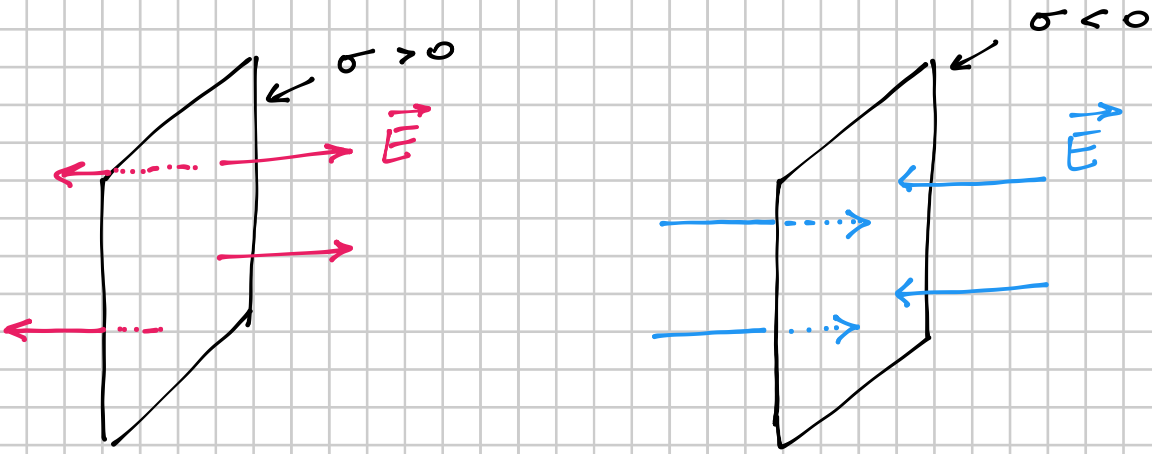
$\Downarrow$

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \text{COSTANTE}$$

CARICA PRESENTE SULLA SUPERFICIE ΔS

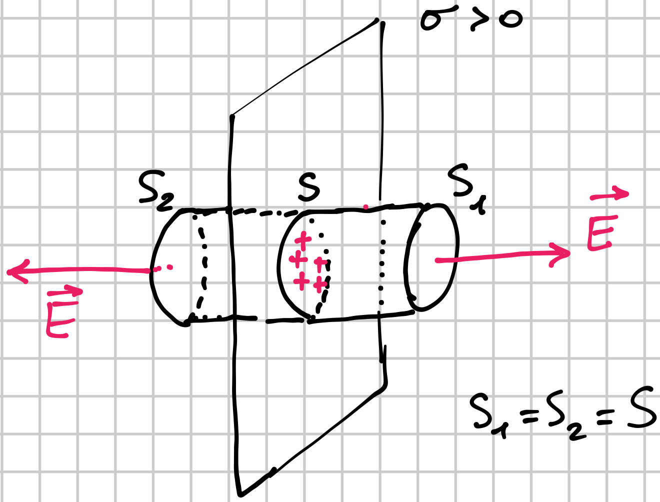
DENSITÀ DI CARICA

AREA DELLA SUPERFICIE



Per simmetria il campo elettrico deve essere perpendicolare al piano e inoltre, alla stessa distanza dal piano, deve assumere lo stesso valore di profilo

alla stessa distanza dal piano E assume lo stesso valore



$S_1 = S_2 = S$

$$\Phi_{\text{CILINDRO}} = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} + \overbrace{\Phi_{S_{\text{LATERALE}}}}^{0}$$

perché $\vec{E}$ è parallelo alla superficie

$$= S_1 E + S_2 E = 2SE$$

TH. GAUSS

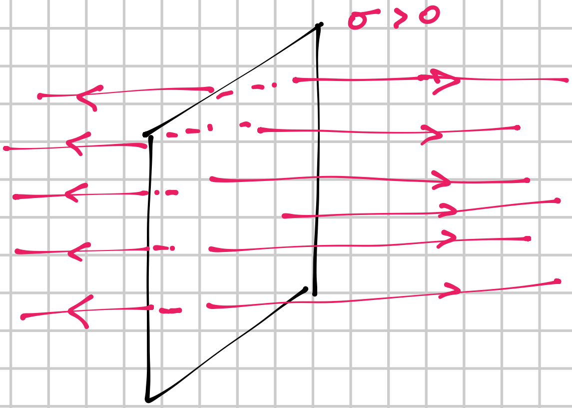
$\Downarrow$

$$\Phi_{\text{CILINDRO}} = \frac{Q_{\text{TOT.}}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

Uguagliando le 2 espressioni del flusso

$$2\cancel{S}E = \frac{\sigma \cancel{S}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

in generale $\boxed{E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}}$



di profilo