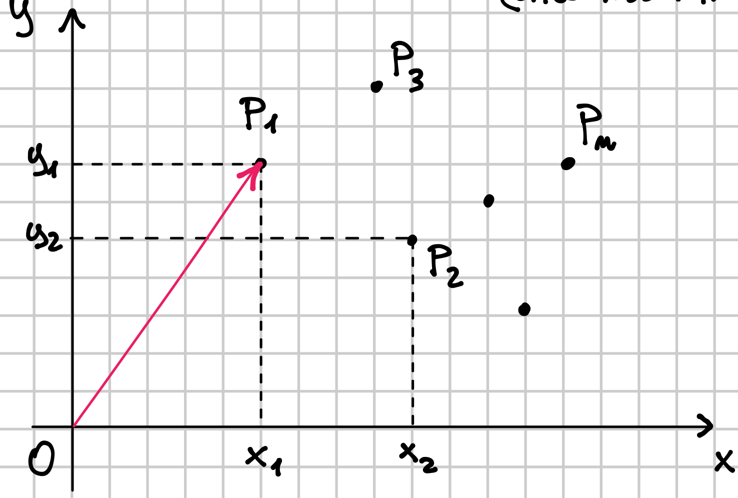
# CENTRO DI MASSA DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI

9/12/2022

(CASO NEL PIANO)




Ad ogni punto $P_i$ $i=1,\dots,n$ è associata la sua massa $m_i$

$(P_1, m_1)$

$(P_2, m_2)$

$\vdots$

$(P_n, m_n)$

$\overrightarrow{OP_1} = \vec{r}_1$ vettore posizione di $P_1$ $\quad \vec{r}_1 = (x_1, y_1)$

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$ COMPONENTI CARTESIANE

$\overrightarrow{OP_n} = \vec{r}_n$ vettore posizione di $P_n$ $\quad \vec{r}_n = (x_n, y_n)$

Il vettore posizione del CENTRO DI MASSA è per definizione

$$\vec{r}_{CM} = \overrightarrow{OC_M} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

Le componenti cartesiane di $\vec{r}_{CM}$

$$\begin{cases} x_{CM} = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\[2ex] y_{CM} = \dfrac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \end{cases}$$

ESEMPIO

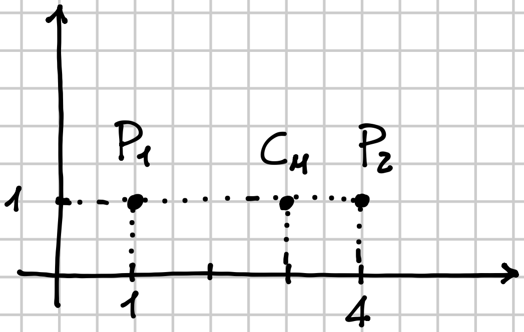
$P_1 = (1,1) \quad m_1 = 2\ kg$

$P_2 = (4,1) \quad m_2 = 4\ kg$

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 4}{6} = 3$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{6} = 1$$

$$C_M = (3, 1)$$




## PROPRIETÀ DEL CENTRO DI MASSA

Per semplicità considero un sistema di 2 punti materiali: tutto ciò che diremo è facilmente generalizzabile a $n$ punti.

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\Delta \vec{r}_{CM}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{CM}(t+\Delta t) - \vec{r}_{CM}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\dfrac{m_1 \vec{r}_1(t+\Delta t) + m_2 \vec{r}_2(t+\Delta t)}{m_1 + m_2} - \dfrac{m_1 \vec{r}_1(t) + m_2 \vec{r}_2(t)}{m_1 + m_2}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\dfrac{m_1 \left[\vec{r}_1(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)\right] + m_2 \left[\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_2(t)\right]}{m_1 + m_2}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{m_1 \left[\dfrac{\vec{r}_1(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)}{\Delta t}\right] + m_2 \left[\dfrac{\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)}{\Delta t}\right]}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{P}_{TOT}}{m_{TOT}}$$

Quindi

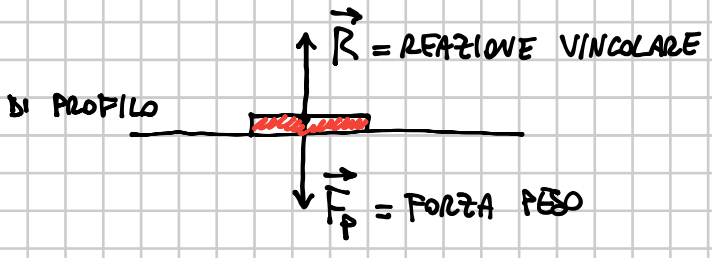
$$\boxed{\vec{P}_{TOT} = m_{TOT}\, \vec{v}_{CM}}$$

SE LA RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE È NULLA, $\vec{P}_{TOT}$ SI CONSERVA, QUINDI $\vec{v}_{CM}$ È COSTANTE, CIOÈ IL CENTRO DI MASSA SI MUOVE DI <u>MOTO RETTILINEO UNIFORME</u>

LE FORZE INTERNE NON CAMBIANO IL MOTO DEL CENTRO DI MASSA (SOLO LE FORZE ESTERNE POSSONO FARLO)

CHIAVE INGLESE LANCIATA SU UN TAVOLO (VISTA DALL'ALTO)


TRASCURIAMO L'ATTRITO, LE FORZE ESTERNE SONO LA FORZA PESO E LA REAZIONE VINCOLARE DEL PIANO DI APPOGGIO




$$\vec{F}_p + \vec{R} = \vec{0}$$

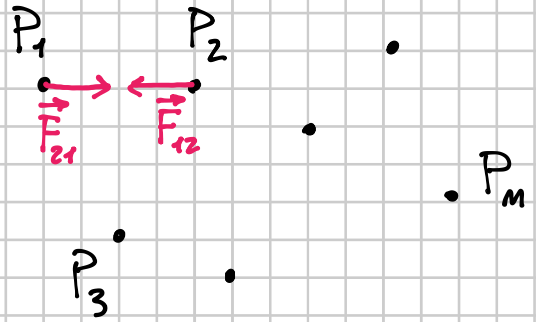
SOMMA DELLE FORZE ESTERNE NULLA

$\Downarrow$

IL CENTRO DI MASSA SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME

## PUNTUALIZZAZIONE SULLE $\underbrace{\text{FORZE INTERNE}}$ ED ESTERNE

FORZE CON CUI PUNTI DEL SISTEMA INTERAGISCONO CON ALTRI PUNTI DEL SISTEMA




FORZE INTERNE

$\vec{F}_{12}$ = forza con cui $P_1$ agisce su $P_2$

$\vec{F}_{21}$ = forza con cui $P_2$ agisce su $P_1$

per il 3° principio della dinamica $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ $\quad (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0})$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SOMMA}}}{\sum} \vec{F}_{INT} = \vec{0}$$

La somma di tutte le forze interne è $\vec{0}$

Ora calcoliamo la variazione della quantità di moto totale del sistema:

$$\Delta\vec{P}_{TOT} = \vec{P}_{TOT\,(DOPO)} - \vec{P}_{TOT\,(PRIMA)} = \vec{P}_{1\,(DOPO)} + \vec{P}_{2\,(DOPO)} + \ldots + \vec{P}_{M\,(DOPO)} -$$

$$- \vec{P}_{1\,(PRIMA)} - \vec{P}_{2\,(PRIMA)} \ldots - \vec{P}_{M\,(PRIMA)} = \Delta\vec{P}_1 + \Delta\vec{P}_2 + \ldots + \Delta\vec{P}_M =$$

applico il TH. DELL'IMPULSO a ogni singolo punto

$$= \vec{F}_1 \Delta t + \vec{F}_2 \Delta t + \ldots + \vec{F}_M \Delta t =$$

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_M$ forze totali su ogni singolo punto

$$= \underbrace{\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_M\right)}_{\substack{\text{SOMMA DI TUTTE LE} \\ \text{FORZE CHE AGISCONO SUL} \\ \text{SISTEMA, INTERNE ED ESTERNE}}} \Delta t = \Big( \underbrace{\sum \vec{F}_{INT}}_{0} + \sum \vec{F}_{EST} \Big) \Delta t =$$

$$= \underset{\substack{\downarrow \\ \text{RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE}}}{\vec{F}_{TOT.\,EST}} \Delta t$$

$$\vec{p}_{TOT} = m_{TOT}\,\vec{v}_{CM} \implies \Delta\vec{p}_{TOT} = m_{TOT}\,\Delta\vec{v}_{CM}$$

ma abbiamo appena visto che $\Delta\vec{p}_{TOT} = \vec{F}_{TOT\,EST}\,\Delta t$

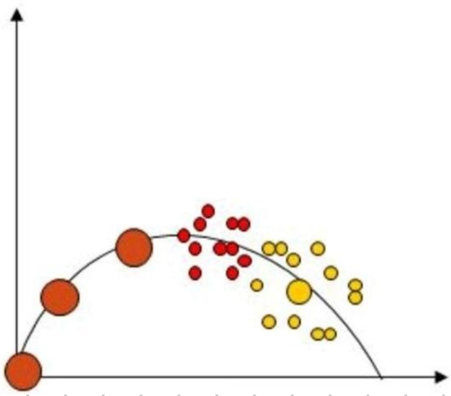
$$\implies \quad \vec{F}_{TOT\,EST}\,\Delta t = m_{TOT}\,\Delta\vec{v}_{CM}$$

$$\vec{F}_{TOT\,EST} = m_{TOT}\,\frac{\Delta\vec{v}_{CM}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{F}_{TOT\,EST} = m_{TOT}\,\vec{a}_{CM}}$$

2° PRINCIPIO DELLA DINAMICA PER UN SISTEMA DI n PUNTI MATERIALI

SE LA FORZA ESTERNA TOTALE CHE AGISCE SUL SISTEMA È NON NULLA, IL CENTRO DI MASSA SI MUOVE COME UN PUNTO MATERIALE DI MASSA $m_{TOT}$ SOGGETTO ALLA FORZA $\vec{F}_{TOT\,EST}$



Ad esempio, il moto del centro di massa di una palla di cannone che esplode a metà della sua traiettoria è sempre parabolico, anche dopo l'esplosione.