113 Un pianeta il cui diametro equatoriale è di 6805 km ha una velocità di fuga di 5017 m/s.

▶ Calcola la massa del pianeta. [$6{,}42 \times 10^{23}$ kg]

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \Rightarrow M = \frac{R v_f^2}{2G} =$$

diametro

$$= \frac{\left(\frac{6{,}805 \times 10^6 \text{ m}}{2}\right)\left(5017 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\left(6{,}67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}\right)} =$$

$$= 6\,419\,933{,}1\ldots \times 10^{17} \text{ kg}$$

$$\simeq \boxed{6{,}42 \times 10^{23} \text{ kg}}$$

114 Una stella ha raggio di Schwarzschild pari a $4{,}06 \times 10^5$ m.

▶ Calcola la massa della stella. [$2{,}74 \times 10^{32}$ kg]

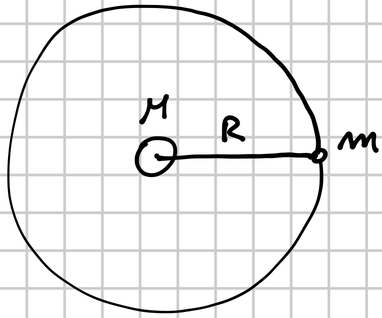
$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R_s}} \Rightarrow M = \frac{R_s \cdot c^2}{2G} = \frac{(4{,}06 \times 10^5 \text{ m})\left(3{,}00 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\left(6{,}67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}\right)} =$$

$$= 2{,}7391\ldots \times 10^{32} \text{ kg}$$

$$\simeq \boxed{2{,}74 \times 10^{32} \text{ kg}}$$

115 ◆◆◆ **ARGOMENTA** Considera un satellite di massa m che descrive un'orbita circolare a distanza R dal centro di un pianeta di massa M, che consideriamo fermo.

- Dimostra che l'energia potenziale U del sistema pianeta-satellite è uguale al doppio dell'energia cinetica K del satellite, cambiata di segno: $U = -2K$.
- Di conseguenza, mostra che l'energia meccanica totale $E_{tot} = K + U$ del sistema è uguale all'opposto dell'energia cinetica del satellite: $E_{tot} = -K$.



$K = \frac{1}{2} m v^2$ $\qquad \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{R}} = G\frac{\cancel{m}M}{R^{\cancel{2}}}$ $\qquad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

$K = \frac{1}{2} m \frac{GM}{R}$ $\qquad U = -G\frac{Mm}{R}$

$-2K = -2\cdot\frac{1}{2} m \frac{GM}{R} = -m\frac{GM}{R} =$ quindi $U = -2K$

Di conseguenza $E_{TOT} = U + K = -2K + K = -K$

116 ◆◆◆ **DIMOSTRA** Un pianeta di massa m esegue un'orbita ellittica con semiasse maggiore a attorno a una stella di massa M, nel sistema di riferimento in cui essa è ferma. Si dimostra che in questo caso l'energia meccanica totale del sistema stella-pianeta è $E_{tot} = K + U = -G\frac{mM}{2a}$.

- Dimostra che questo risultato è coerente con quello trovato nella domanda precedente.

Se l'orbita è circolare $a = R$, dunque $E_{TOT} = -G\underbrace{\frac{mM}{2R}}_{K} = -K$

in accordo con quanto trovato nell'es. precedente

117 ◆◆◆ Immagina che si voglia lanciare un razzo dal pianeta Venere in modo che sfugga al suo campo gravitazionale.

- Calcola la velocità minima che deve raggiungere il razzo.
- Se il razzo si trovasse sulla Terra riuscirebbe a sfuggire al suo campo gravitazionale? NO

[10,4 km/s; no]

$$v_{f_V} = \sqrt{\frac{2GM_V}{R_V}} = \sqrt{\frac{2\left(6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}\right)\left(4{,}87 \times 10^{24}\ kg\right)}{6{,}05 \times 10^{6}\ m}} =$$

$$= 10{,}36... \times 10^{3}\ \frac{m}{s} \simeq 10{,}4\ \frac{km}{s}$$

Non riuscirebbe ad abbandonare la Terra perché la vel. di fuga dalla Terra è maggiore $\left(11{,}2\ \frac{km}{s}\right)$

119 **ORA PROVA TU** Europa, uno dei satelliti di Giove ($M = 1{,}90 \times 10^{27}$ kg), quando si trova nel perigiovio ha una distanza dal suo pianeta di $66{,}5 \times 10^{7}$ m e un'energia cinetica di $4{,}57 \times 10^{30}$ J.

- Calcola l'energia totale e potenziale del sistema Europa-Giove al perigiovio;
- Determina la massa di Europa.

[$-4{,}57 \times 10^{30}$ J; $-9{,}14 \times 10^{30}$ J; $4{,}80 \times 10^{22}$ kg]

$$E_{TOT} = -K = -4{,}57 \times 10^{30}\ \text{J} \qquad U = -2K = -9{,}14 \times 10^{30}\ \text{J}$$

DALL'ES. 115

$$U = -G\frac{M_G m_E}{R} \Rightarrow m_E = -\frac{UR}{GM_G} =$$

$$= -\frac{(-9{,}14 \times 10^{30}\ \text{J})(66{,}5 \times 10^{7}\ \text{m})}{\left(6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\right)(1{,}90 \times 10^{27}\ \text{kg})} =$$

$$= 47{,}96\ldots \times 10^{21}\ \text{kg}$$

$$\simeq \boxed{4{,}80 \times 10^{22}\ \text{kg}}$$