**88** Data la funzione $y = a\tan(bx)$, esprimi, in funzione di $a$ e $b$ diversi da 0, il periodo e gli asintoti paralleli all'asse $y$.

**a.** Determina la funzione di periodo $T = 2\pi$, passante per $\left(\frac{\pi}{2}; -2\right)$ e con $b > 0$.

**b.** Rappresenta la funzione trovata in un sistema di assi cartesiani ortogonali.

**c.** Come potresti modificare la legge per rendere il grafico simmetrico rispetto all'asse $y$?

**d.** Determina la funzione inversa indicando dominio e insieme immagine.

$\left[T=\frac{\pi}{|b|}; x=\frac{\pi}{2b}+k\frac{\pi}{b}; \text{a) } y=-2\tan\frac{x}{2}; \text{c) per esempio: } y=-2\tan\frac{|x|}{2}; \text{d) } y=-2\arctan\frac{x}{2}; D: \mathbb{R}, Im(f): ]-\pi; \pi[\right]$

$y = a\tan(bx)$ $\boxed{\text{PERIODO } T = \frac{\pi}{|b|}}$

$bx \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2b} + \frac{k\pi}{b}$ $\quad$ $\text{dom} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2b} + \frac{k\pi}{b}\right\}$

$\boxed{\text{ASINTOTI } x = \frac{\pi}{2b} + \frac{k\pi}{b}}$

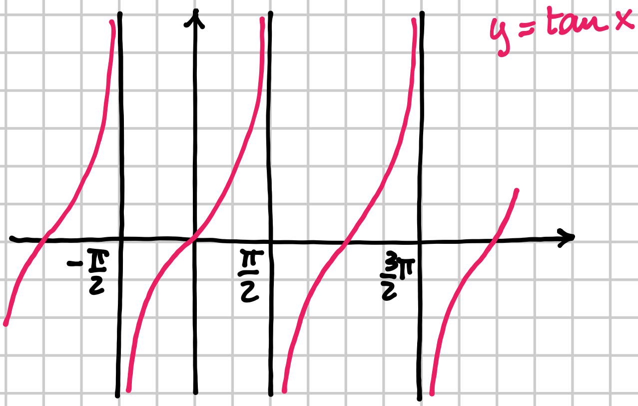
a) $T = 2\pi$ per $\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$ con $b > 0$

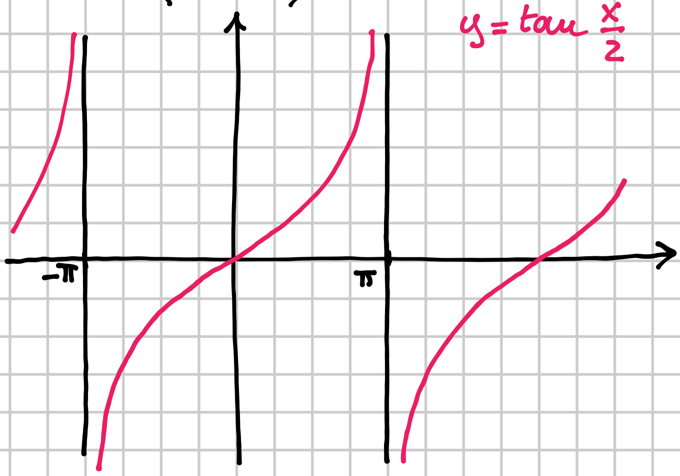
$T = \frac{\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}} \vee b = -\frac{1}{2}$ NON ACC. perché $b > 0$

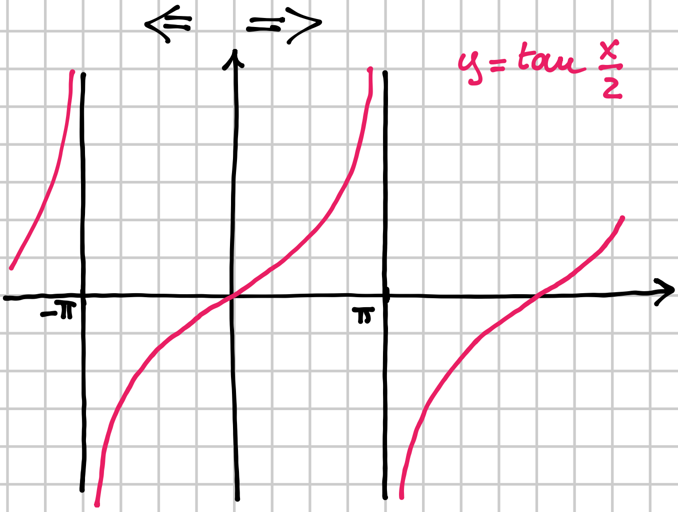
$y = a\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ passaggio per $\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$

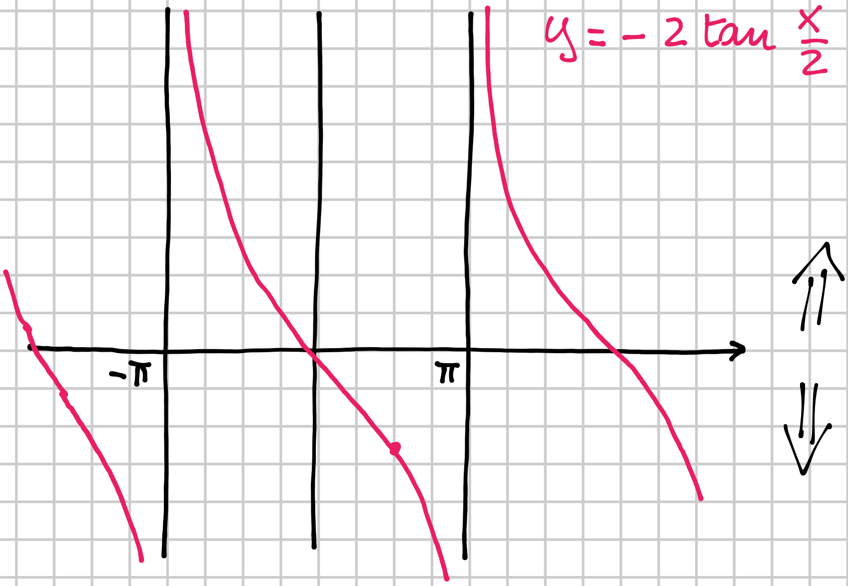
$-2 = a\underbrace{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{1} \Rightarrow a = -2$ $\quad$ $\boxed{y = -2\tan\frac{x}{2}}$

$\Leftarrow \quad \Rightarrow$

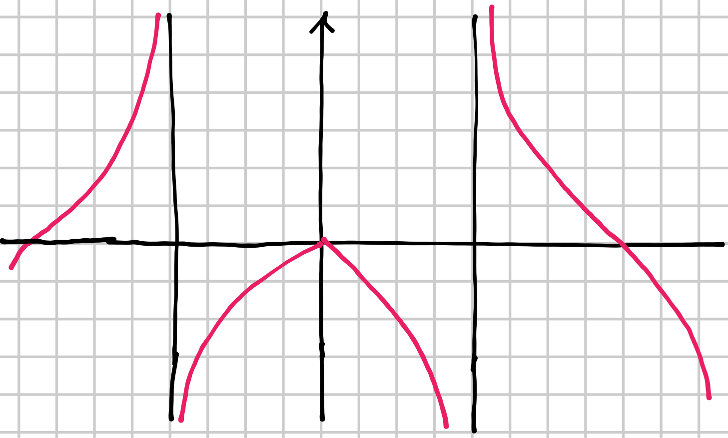





c) $y = -2\tan\left(\frac{|x|}{2}\right)$ DIVENTA SIMMETRICA RISPETTO ALL'ASSE $y$



d) $y = -2\tan\frac{x}{2}$ è invertibile nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ (biettiva)

$f: (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f^{-1}: \mathbb{R} \to (-\pi, \pi)$

$$y = -2\tan\frac{x}{2} \Rightarrow \tan\frac{x}{2} = -\frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \arctan\left(-\frac{y}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x = 2\arctan\left(-\frac{y}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y = 2\arctan\left(-\frac{x}{2}\right)}$$ oppure $y = -2\arctan\frac{x}{2}$ perché arctan è dispari

**87** Data la funzione $f(x) = \frac{a}{2} + \frac{4}{\pi} \arcsin(x+1)$:

**a.** trova $a$ in modo che il suo grafico passi per $(0; 5)$;

**b.** determina il dominio e l'insieme immagine della funzione $f_1$ ottenuta per il valore di $a$ del punto precedente;

**c.** rappresenta graficamente $f_1$;

**d.** determina il punto di intersezione del suo grafico con l'asse $y$;

**e.** traccia il grafico di $f_1(|x|) - 2$.

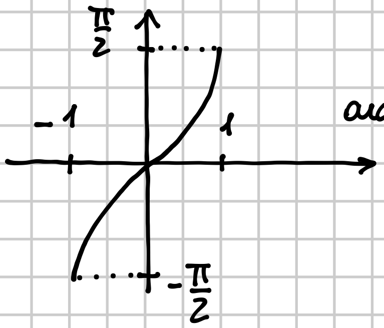
[a) $a = 6$; b) $D:[-2; 0]$, $Im(f_1):[1; 5]$; d) $(0; 5)$]

a) $5 = \frac{a}{2} + \frac{4}{\pi} \underbrace{\arcsin(0+1)}_{\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}}$

$5 = \frac{a}{2} + \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}}$

$3 = \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{a = 6}$

b) $f(x) = 3 + \frac{4}{\pi} \arcsin(x+1)$




$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

quindi $-1 \leq x+1 \leq 1 \Rightarrow -2 \leq x \leq 0$

$\text{dom} f = [-2, 0]$

im $\arcsin(x+1)$

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

im $\frac{4}{\pi} \arcsin(x+1)$

$[-2, 2]$

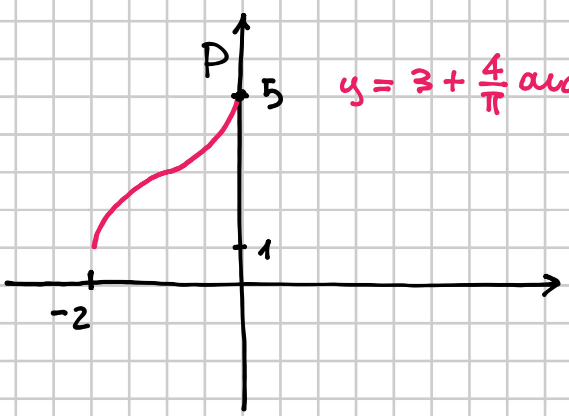
$-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{\pi}$ $\quad$ $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{\pi}$

im $3 + \frac{4}{\pi} \arcsin(x+1)$

$[1, 5]$

$-2+3$ $\quad$ $2+3$

c)




$y = 3 + \frac{4}{\pi} \arcsin(x+1)$

d) $\begin{cases} y = 3 + \frac{4}{\pi} \arcsin(x+1) \\ x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 3 + \frac{4}{\pi} \overbrace{\arcsin(1)}^{\pi/2} \\ x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 3 + 2 = 5 \\ x = 0 \end{cases}$ $\quad P(0, 5)$

e) $f(|x|)$ non è definita, se non per $x = 0$, poiché il dominio di $f$ è $[-2, 0]$