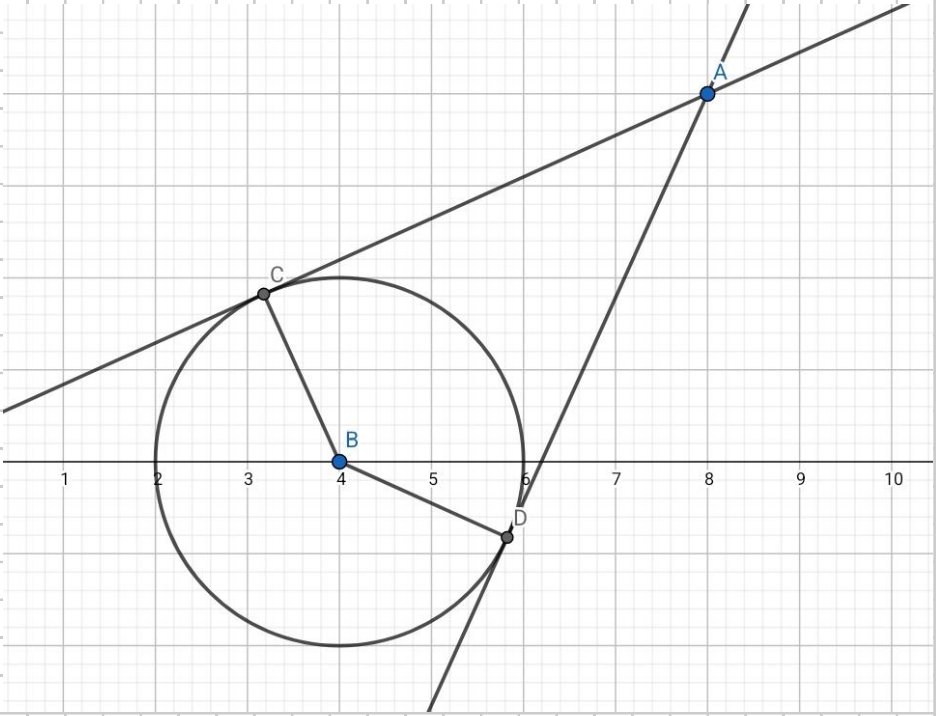
97 Determina l'ampiezza dell'angolo formato dalle tangenti alla circonferenza di equazione $(x-4)^2+y^2=4$ condotte dal punto $A(8;4)$.

$\left[\arctan \frac{\sqrt{7}}{3}\right]$

24/10/2022

$B(4,0)$ ← CENTRO CIRC.

$r=2$ ← RAGGIO



Le tangenti (condotte da $A(8,4)$) sono le rette del fascio proprio per A che distano dal centro B della circonferenza per una quantità pari al raggio $r=2$

FASCIO PROPRIO PER A → $y-4=m(x-8)$

↳ IN FORMA IMPLICITA $mx-y-8m+4=0$

DISTANZA PUNTO-RETTA $= \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

RETTA ⇒ $ax+by+c=0$

PUNTO ⇒ (x_0,y_0)

Impongo che la distanza di $mx-y-8m+4=0$ dal centro $B(4,0)$ sia uguale al raggio 2

$$\frac{|4m-0-8m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=2$$

$|4-4m|=2\sqrt{m^2+1}$ elevo al quadrato

$16+16m^2-32m=4m^2+4$

$12m^2-32m+12=0$

$3m^2-8m+3=0$

$$m=\frac{4\pm\sqrt{16-9}}{3}=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$$

(LA TANGENTE DELL)
ANGOLO ACUTO γ FRA LE 2 RETTE $\Rightarrow$ $\tan\gamma = \left|\dfrac{m - m'}{1 + m m'}\right|$

$$m = \frac{4+\sqrt{7}}{3} \qquad m' = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$$

$$\tan\gamma = \left|\frac{\frac{4+\sqrt{7}}{3} - \frac{4-\sqrt{7}}{3}}{1 + \frac{4+\sqrt{7}}{3}\,\frac{4-\sqrt{7}}{3}}\right| = \left|\frac{\frac{\cancel{4}+\sqrt{7}-\cancel{4}+\sqrt{7}}{3}}{1 + \frac{16-7}{9}}\right| =$$

$$= \left|\frac{\frac{2\sqrt{7}}{3}}{1+1}\right| = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \boxed{\gamma = \arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)}$$

TECNICA DELL'ANGOLO AGGIUNTO

↳ serve per scrivere una funzione <u>lineare</u> in sin e cos

$$y = a \sin x + b \cos x$$

in soli termini di sin:

$$y = r \sin(x + \alpha) \qquad r > 0$$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

$$r \sin(x+\alpha) = r\left[\sin x \cos\alpha + \cos x \sin\alpha\right] =$$

$$= r\cos\alpha \sin x + r \sin\alpha \cos x$$

confronto con $\quad a \sin x + b \cos x \Rightarrow \begin{cases} a = r\cos\alpha \\ b = r\sin\alpha \end{cases}$ devo risolvere questo sistema e trovare r e α

$$a^2 + b^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha$$

$$a^2+b^2 = r^2\underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1} \Rightarrow r = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\cancel{r}\sin\alpha}{\cancel{r}\cos\alpha} \Rightarrow \frac{b}{a} = \tan\alpha$$ e posso trovare α

(guardo i segni di $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$)

FORMULE DI DUPLICAZIONE

1) $\sin 2\alpha$ 2) $\cos 2\alpha$ 3) $\tan 2\alpha$

1) $\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha\cdot\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

2) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$= 1-\sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$

$= \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\ &= 2\cos^2\alpha - 1\\ &= 1-2\sin^2\alpha\end{aligned}}$$

3) $\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha} = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$\alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$

$2\alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$

$\Downarrow$

$\alpha \neq \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}}$$