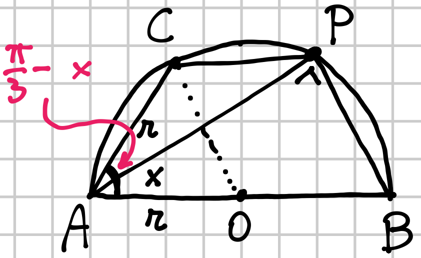
16/12/2022

178 Su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ considera la corda $\overline{AC} = r$ e sull'arco $\widehat{CB}$ un punto P variabile, con $P\hat{A}B = x$. Calcola x in modo che il perimetro di $ACPB$ sia $5r$. Trova poi l'area del quadrilatero corrispondente al valore di x determinato.

$\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}\right]$



$$\boxed{2P_{ACPB} = 5r}$$

$$\mathcal{A}_{ACPB} = ?$$

AOC è un triangolo equilatero, quindi $C\hat{A}O = \frac{\pi}{3}$

$$\Downarrow$$

(P può variare da B a C) $\Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{3}$

$\overline{OA} = r \qquad P\hat{A}B = x$

$\overline{AC} = r$

$\overline{PB} = \overline{AB} \cdot \sin x = 2r \sin x \qquad \overline{CP} = 2r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ per il teorema delle corde

$\overline{AB} = 2r \quad \overline{AC} = r$

$$2P_{ACPB} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{CP} + \overline{PB} = 2r + r + 2r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 2r \sin x =$$

$$= r\left(3 + 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 2\sin x\right)$$

$$2P_{ACPB} = 5r \Rightarrow \begin{cases} \cancel{r}\left(3 + 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 2\sin x\right) = 5\cancel{r} \\ 0 < x < \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$3 + 2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right) + 2\sin x = 5$$

$$3 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) + 2\sin x = 5$$

$$3 + \sqrt{3}\cos x - \sin x + 2\sin x = 5$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos x + \sin x = 2 \\ 0 < x < \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos x + \sin x = 2 \\ 0 < x < \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}X + Y = 2 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = 2 - \sqrt{3}X \\ X^2 + 4 + 3X^2 - 4\sqrt{3}X - 1 = 0 \end{cases}$$

$$4X^2 - 4\sqrt{3}X + 3 = 0$$

$$(2X - \sqrt{3})^2 = 0 \qquad \begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ Y = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{3} \qquad \Downarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{6}}$$

$$\overline{AP} = \overline{AB}\cos x = 2r\cos x = 2r\cos\frac{\pi}{6}$$

$$C\hat{A}P = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \qquad P\hat{A}B = \frac{\pi}{6}$$

$$\mathcal{A}_{ACPB} = \mathcal{A}_{ACP} + \mathcal{A}_{PBA} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AP}\cdot\sin\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{AB}\cdot\sin\frac{\pi}{6} =$$

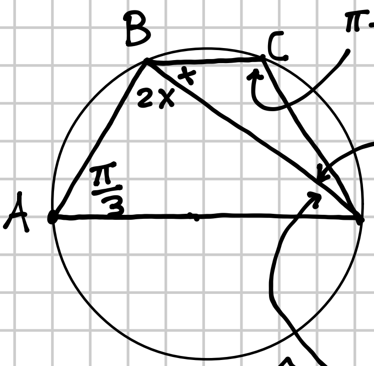
$$= \frac{1}{\cancel{2}} r\cdot\cancel{2}r\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{6} + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}r\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot 2r\cdot\sin\frac{\pi}{6} =$$

$$= r^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} + 2r^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = 3r^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}}$$

180 È dato il quadrilatero $ABCD$ inscritto in una circonferenza di raggio r. L'angolo in A è di $\frac{\pi}{3}$, quello in B è tale che $A\widehat{B}D$ è doppio di $D\widehat{B}C$. Poni $D\widehat{B}C = x$ e determina l'espressione analitica della funzione

$$f(x) = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} - 3\frac{\overline{BC}}{\overline{DB}}.$$

Trova per quali valori di x si ha $f(x) < \sqrt{3}$. $\left[f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right), \text{con } 0 < x < \frac{\pi}{3}; 0 < x < \frac{\pi}{6}\right]$



$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

r = raggio della circonferenza

$B\widehat{D}C = \pi - \frac{2}{3}\pi - x = \frac{\pi}{3} - x$

$A\widehat{D}B = \pi - \frac{\pi}{3} - 2x = \frac{2}{3}\pi - 2x$

Considero il triangolo ADB. $\hat{B} + \hat{D}$ non può superare $\frac{2}{3}\pi$

$\Downarrow$

$0 < 2x < \frac{2}{3}\pi \implies 0 < x < \frac{\pi}{3}$

$\overline{AD} = 2r\sin 2x \qquad \overline{BC} = 2r\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

$\overline{DC} = 2r\sin x \qquad \overline{DB} = 2r\sin\frac{\pi}{3} = 2r\frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$

$$f(x) = \frac{\cancel{2r}\sin 2x}{\cancel{2r}\sin x} - 3\frac{2\cancel{r}\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{\cancel{r}\sqrt{3}} = \frac{\sin 2x}{\sin x} - 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) =$$

$$= \frac{2\cancel{\sin x}\cos x}{\cancel{\sin x}} - 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 2\cos x - 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) =$$

$$= 2\cos x - 2\sqrt{3}\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right) =$$

$$= 2\cos x - 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = 2\cos x - 3\cos x + \sqrt{3}\sin x =$$

$$= \sqrt{3}\sin x - \cos x \qquad 0 < x < \frac{\pi}{3}$$

LIBRO $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\left[\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right] =$

$$= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right] = \sqrt{3}\sin x - \cos x$$

$f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x \qquad 0 < x < \frac{\pi}{3}$

$f(x) < \sqrt{3}$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\sin x - \cos x < \sqrt{3} \\ 0 < x < \frac{\pi}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{3}\,Y - X < \sqrt{3} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{3}\,Y < X + \sqrt{3} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y < \frac{\sqrt{3}}{3}X + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$Y = \frac{\sqrt{3}}{3}X + 1$

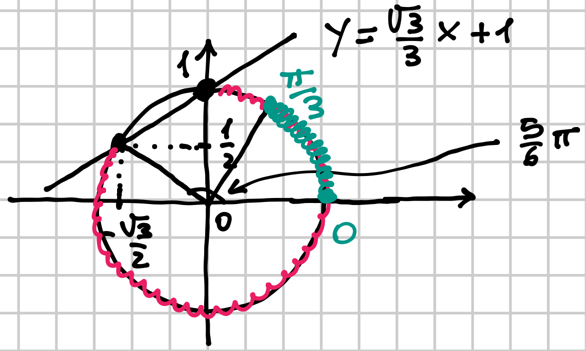
$X^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}X + 1\right)^2 = 1$

$X^2 + \frac{1}{3}X^2 + \cancel{1} + \frac{2\sqrt{3}}{3}X = \cancel{1}$

$\frac{4}{3}X^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}X = 0$

$\frac{2}{3}X\left(2X + \sqrt{3}\right) = 0 \quad X = 0 \quad X = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} X = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ Y = \frac{1}{2} \end{cases}$$



La soluzione della disequazione con $0 \le x \le 2\pi$

$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \vee \frac{5}{6}\pi \le x \le 2\pi$

va intersecato col dominio iniziale $0 < x < \frac{\pi}{3}$

quindi la soluzione finale è $\boxed{0 < x < \frac{\pi}{3}}$