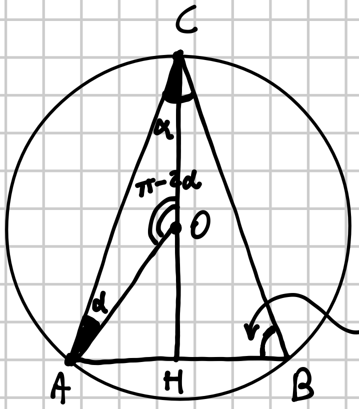
174 In una circonferenza di raggio 2, la corda AB misura $\frac{16}{9}\sqrt{5}$. Preso C sull'arco maggiore $\widehat{AB}$ in modo che $\overline{AC} = \overline{CB}$, determina il perimetro del triangolo ABC. $\left[\frac{40}{9}\sqrt{5}\right]$



$r = 2$

$\overline{HB} = \frac{8}{9}\sqrt{5}$

$\frac{\pi}{2} - \alpha$ perché è la metà di $A\hat{O}C$

$A\hat{C}B = 2\alpha$ per il teorema della corda $\overline{AB} = 2r\sin 2\alpha$

$$\frac{\overset{4}{\cancel{16}}}{9}\sqrt{5} = \cancel{4}\sin 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = \frac{4}{9}\sqrt{5}$$

$$\Downarrow$$

$$2\alpha = \arcsin \frac{4}{9}\sqrt{5}$$

(non consideriamo la soluzione $\pi - \arcsin \frac{4}{9}\sqrt{5}$ perché C è sull'arco maggiore $\widehat{AB}$)

$$\alpha = \frac{\arcsin \frac{4}{9}\sqrt{5}}{2}$$

$$\overline{CB} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \overline{HB}$$

$$\overline{CB} = \frac{\overline{HB}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\arcsin \frac{4}{9}\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{\frac{8}{9}\sqrt{5}}{\sin\left(\frac{\arcsin \frac{4}{9}\sqrt{5}}{2}\right)} = \dots (*)$$

A PARTE

$$\sin\left(\frac{\arcsin \frac{4}{9}\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\arcsin \frac{4}{9}\sqrt{5}\right)}{2}} = \dots (**)$$

A PARTE

$$\cos\left(\arcsin \frac{4}{9}\sqrt{5}\right) = \sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin \frac{4}{9}\sqrt{5}\right)} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{9}\sqrt{5}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1-\frac{80}{81}} = \sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9}$$

$$(**) = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{9}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{8}{9}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$(*) = \overline{CB} = \dots = \frac{\frac{8}{9}\sqrt{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{9}_{3}}\sqrt{5}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{5}$$

$$2p_{ABC} = \frac{16}{9}\sqrt{5} + 2\cdot\frac{4}{3}\sqrt{5} = \frac{16+24}{9}\sqrt{5} = \boxed{\frac{40}{9}\sqrt{5}}$$