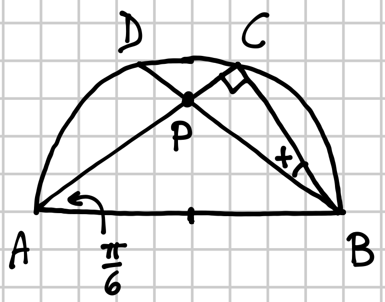
184 Date la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e la corda $\overline{AC} = r\sqrt{3}$, considera la corda BD che interseca AC in P. Posto $P\widehat{B}C = x$, determina la funzione $f(x) = \dfrac{\overline{PC} + \overline{CB}}{\overline{PB}}$ e rappresentala graficamente evidenziando il tratto che si riferisce al problema.

$$\left[y = \sin x + \cos x, \text{ con } 0 \le x \le \frac{\pi}{3}\right]$$



$\overline{AC} = r\sqrt{3}$

$$f(x) = \frac{\overline{PC} + \overline{CB}}{\overline{PB}}$$

Per il teorema della corda $\overline{AC} = 2r \cdot \sin C\widehat{B}A \Rightarrow \cancel{r}\sqrt{3} = 2\cancel{r} \sin C\widehat{B}A$

$$\sin C\widehat{B}A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$C\widehat{B}A = \frac{\pi}{3}$$

Quindi $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$

$$\overline{CB} = 2r \sin\frac{\pi}{6} = 2r \cdot \frac{1}{2} = r$$

$$\overline{CB} = \overline{PB} \cdot \cos x \Rightarrow \overline{PB} = \frac{r}{\cos x}$$

$$\overline{PC} = \overline{PB} \sin x = r\,\frac{\sin x}{\cos x} = r\tan x$$

$$f(x) = \frac{r\tan x + r}{\frac{r}{\cos x}} = \frac{r\,\frac{\sin x}{\cos x} + r}{\frac{r}{\cos x}} = \frac{\cancel{r}\left(\frac{\sin x}{\cos x} + 1\right)}{\frac{\cancel{r}}{\cos x}} =$$

$$= \frac{\frac{\sin x + \cos x}{\cancel{\cos x}}}{\frac{1}{\cancel{\cos x}}} = \sin x + \cos x = a\sin(x + \varphi) \qquad a > 0$$

USO IL METODO DELL'ANGOLO AGGIUNTO
PER TRASFORMARE LA FUNZIONE
IN MODO CHE SI POSSA RAPPRESENTARE

$$a \sin(x+\varphi) = \sin x + \cos x \qquad a>0$$

$$a\left[\sin x \cdot \cos\varphi + \cos x \cdot \sin\varphi\right] = \sin x + \cos x$$

$$a\cos\varphi \cdot \sin x + a\sin\varphi \cdot \cos x = \sin x + \cos x$$

per confronto
$$\begin{cases} a\cos\varphi = 1 \\ a\sin\varphi = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{a\sin\varphi}{a\cos\varphi} = \frac{1}{1} \Rightarrow \tan\varphi = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

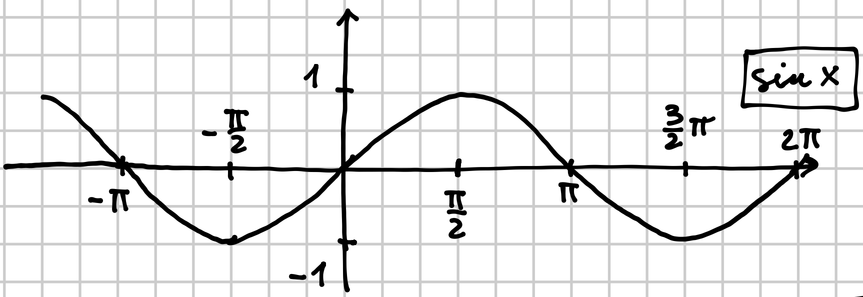
$\Downarrow$

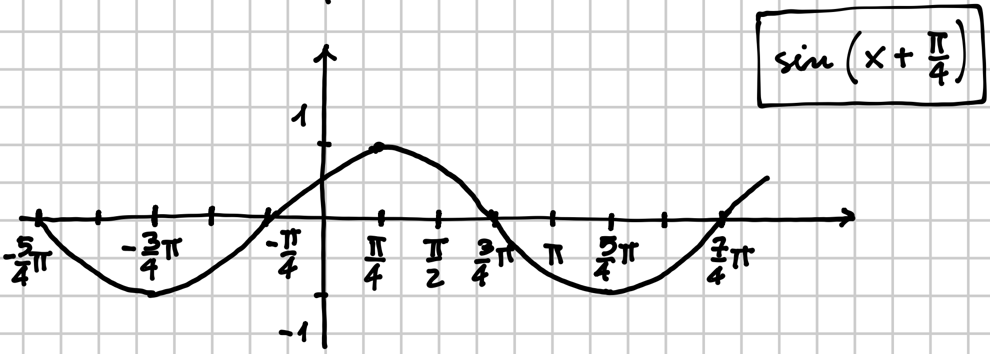
$\sin\varphi$ e $\cos\varphi$ devono essere positivi!

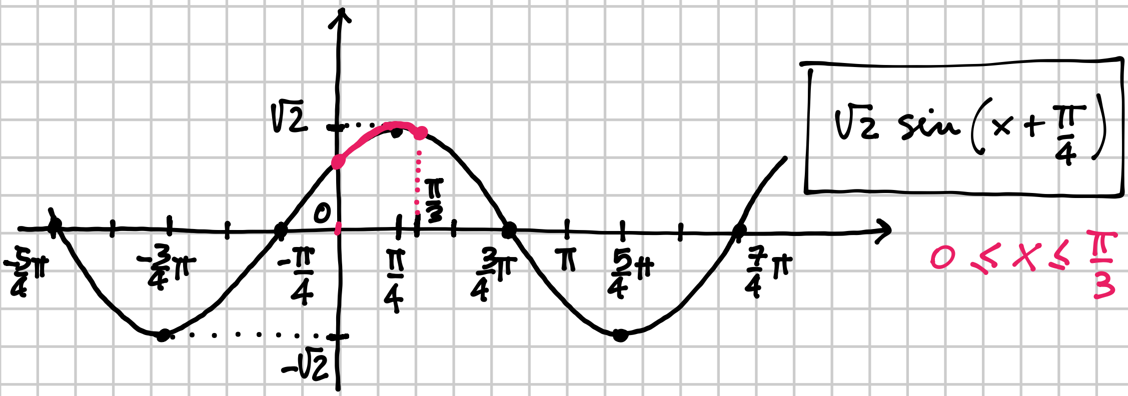
($\frac{\pi}{4}+\pi$ non va bene perché altrimenti $\sin\varphi$ e $\cos\varphi$ sarebbero <0)

$$a = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

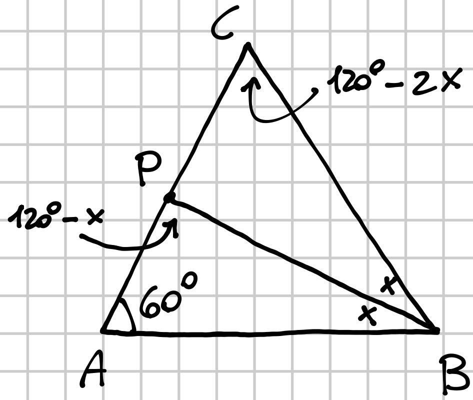
$$f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{3}$$







212 È dato il triangolo ABC tale che $\overline{AB} = 3$, $C\widehat{A}B = 60°$, $A\widehat{B}C = 2x$. Traccia la bisettrice dell'angolo $A\widehat{B}C$ che incontra il lato AC nel punto P, considera la funzione $f(x) = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AP}}$ e, nei limiti imposti dal problema, risolvi la disequazione $f(x) \leq 1 + \sqrt{3}$. $[0° < x \leq 45°]$



$\overline{AB} = 3$

$$f(x) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AP}}$$

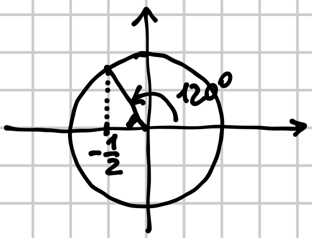
$$0° < 2x < 120°$$

$$\Downarrow$$

$$0° < x < 60°$$

TH. DEI SENI $\dfrac{\overline{AB}}{\sin(120° - x)} = \dfrac{\overline{AP}}{\sin x} \Rightarrow \overline{AP} = \dfrac{3\sin x}{\sin(120° - x)}$

$$= \frac{3\sin x}{\sin 120° \cos x - \cos 120° \sin x} =$$



$$= \frac{3\sin x}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x} =$$

$$= \frac{6\sin x}{\sqrt{3}\cos x + \sin x}$$

TH. DEI SENI $\dfrac{\overline{AC}}{\sin 2x} = \dfrac{3}{\sin(120° - 2x)}$

$$\Rightarrow \overline{AC} = \frac{3\sin 2x}{\sin 120° \cos 2x - \cos 120° \sin 2x} = \frac{3\sin 2x}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x} =$$

$$= \frac{6\sin 2x}{\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AP}} \leq 1 + \sqrt{3} \\ 0° < x < 60° \end{cases}$$

$$\frac{\cancel{6}\sin 2x}{\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x} \cdot \frac{\sqrt{3}\cos x + \sin x}{\cancel{6}\sin x} \leq 1 + \sqrt{3}$$

$$\frac{\cancel{6}\sin 2x}{\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x}\cdot\frac{\sqrt{3}\cos x+\sin x}{\cancel{6}\sin x}\le 1+\sqrt{3}$$

$$\frac{2\cancel{\sin}x\cdot\cos x}{\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x}\cdot\frac{\sqrt{3}\cos x+\sin x}{\cancel{\sin}x}\le 1+\sqrt{3}$$

$$\frac{2\sqrt{3}\cos^2 x+2\sin x\cos x}{\sqrt{3}(2\cos^2 x-1)+2\sin x\cos x}\le 1+\sqrt{3}$$

$$\frac{2\sqrt{3}\cos^2 x+2\sin x\cos x}{2\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}+2\sin x\cos x}\le 1+\sqrt{3}$$

questo denominatore è sempre positivo nell'intervallo $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ (perché è il seno di un angolo interno di un triangolo)

$$\cancel{2\sqrt{3}\cos^2 x}+\cancel{2\sin x\cos x}\le\cancel{2\sqrt{3}\cos^2 x}-\sqrt{3}+\cancel{2\sin x\cos x}+6\cos^2 x-3+2\sqrt{3}\sin x\cos x$$

$$0\le 6\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sqrt{3}-3$$

$$6\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sqrt{3}-3\ge 0$$

$$6\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-(\sqrt{3}+3)(\sin^2 x+\cos^2 x)\ge 0$$

$$6\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-(\sqrt{3}+3)\sin^2 x-(\sqrt{3}+3)\cos^2 x\ge 0$$

$$-(\sqrt{3}+3)\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+(3-\sqrt{3})\cos^2 x\ge 0$$

$$(\sqrt{3}+3)\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+(\sqrt{3}-3)\cos^2 x\le 0$$

DIVIDO PER $\cos^2 x$

$$(\sqrt{3}+3)\tan^2 x-2\sqrt{3}\tan x+(\sqrt{3}-3)\le 0$$

$$(\sqrt{3}+3)\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + (\sqrt{3}-3) \leq 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 3 - (\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}-3) = 3 - (3-9) = 9$$

$$\tan x = \frac{\sqrt{3} \pm 3}{\sqrt{3}+3} = \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}+3} \cdot \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}-3} = \frac{3+9-6\sqrt{3}}{3-9} = \frac{12-6\sqrt{3}}{-6} = \sqrt{3}-2$$

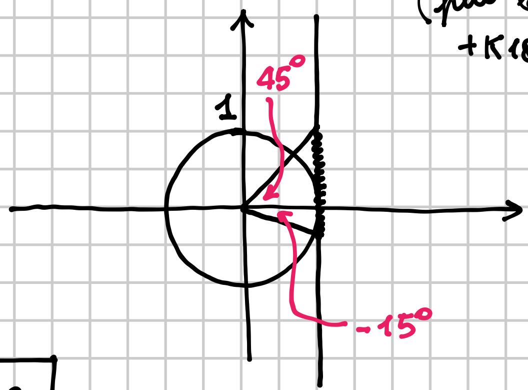
$$\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+3} = 1$$

$$\sqrt{3}-2 \leq \tan x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -15^\circ \leq x \leq 45^\circ$$

(più la periodicità) $+k180^\circ$

$\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$ $\qquad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

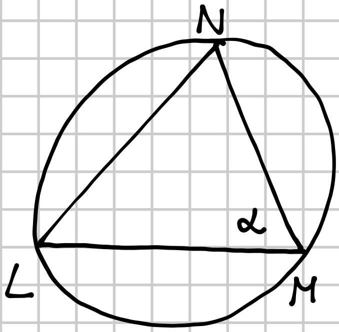
$\tan(-15^\circ) = -(2-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-2$



$$\begin{cases} 0^\circ < x < 60^\circ \\ -15^\circ \leq x \leq 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \boxed{0^\circ < x \leq 45^\circ}$$

239 Nel triangolo LMN la lunghezza del lato LM è $6\sqrt{21}$ cm, quella del lato MN è 50 cm e il seno dell'angolo compreso fra essi è $\frac{2}{5}$. Determina l'area del triangolo e il raggio della circonferenza circoscritta.

[$S_1 = S_2 = 60\sqrt{21}$ cm^2; $r_1 = 95$ cm, $r_2 = 5\sqrt{46}$ cm]



$\overline{LM} = 6\sqrt{21}$ $\quad \overline{MN} = 50$

$\sin\alpha = \frac{2}{5}$ $\quad \mathcal{A} = \frac{1}{2}\overline{LM}\cdot\overline{MN}\cdot\sin\alpha =$

$= \frac{1}{\cancel{2}} 6\sqrt{21}\cdot \overset{10}{\cancel{50}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{5}} = 60\sqrt{21}$

Per il teorema della corda $\overline{LN} = 2r\sin\alpha \Rightarrow r = \frac{\overline{LN}}{2\sin\alpha}$

$$\overline{LN}^2 = \overline{LM}^2 + \overline{NM}^2 - 2\,\overline{LM}\cdot\overline{NM}\cdot\cos\alpha$$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{4}{25}} = \pm\frac{\sqrt{21}}{5}$

$+\frac{\sqrt{21}}{5}$ se α ACUTO

$-\frac{\sqrt{21}}{5}$ se α OTTUSO

1) $\overline{LN} = \sqrt{756+2500-2\cdot 6\sqrt{21}\cdot\overset{10}{\cancel{50}}\cdot\frac{\sqrt{21}}{\cancel{5}}} = \sqrt{756+2500-2520} = \sqrt{736} =$

$= 4\sqrt{46}$

$r = \frac{\overline{LN}}{2\sin\alpha} = \frac{4\sqrt{46}}{2\cdot\frac{2}{5}} = \boxed{5\sqrt{46}}$

2) $\overline{LN} = \sqrt{756+2500-2\cdot 6\sqrt{21}\cdot\overset{10}{\cancel{50}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{21}}{\cancel{5}}\right)} = \sqrt{756+2500+2520} = \sqrt{5776} = 76$

$r = \frac{\overline{LN}}{2\sin\alpha} = \frac{76}{2\cdot\frac{2}{5}} = \boxed{95}$