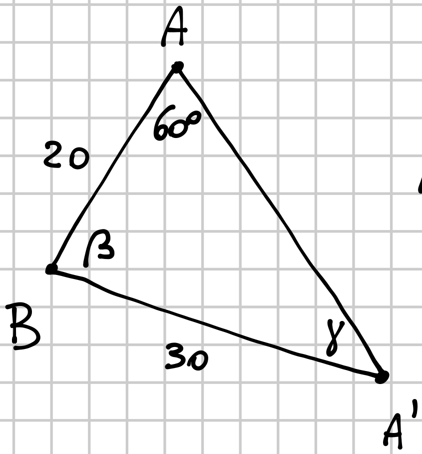
206 REALTÀ E MODELLI **Passaggi** Durante una partita di calcio, si svolge l'azione rappresentata in figura: un giocatore in A passa la palla a un compagno in B, che gliela ripassa nella posizione A', dove si è spostato nel frattempo.
Si sa che $AB = 20$ m e $A'B = 30$ m, mentre l'angolo formato dalle direzioni AB e $A'A$ è $\alpha = 60°$.

a. Calcola la distanza AA' percorsa dal primo giocatore.

b. Determina l'angolo formato dalle direzioni della palla in arrivo e in partenza da B.

[a) 34,5 m; b) 84,7°]



$\overline{AA'} = ?$

$\beta = ?$

TH. SENI $\Rightarrow \dfrac{\overline{A'B}}{\sin 60°} = \dfrac{\overline{AB}}{\sin \gamma}$

$$\sin\gamma = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B}} \cdot \sin 60° = \frac{20}{30}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\gamma = \arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad \beta + \gamma = 120° \Rightarrow \beta = 120° - \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3} =$

$= 84{,}7356\ldots° \simeq \boxed{84{,}7°}$

TH. COSENO $\Rightarrow \overline{AA'} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{A'B}^2 - 2\,\overline{AB}\,\overline{A'B}\cos\beta} =$

$= \sqrt{400 + 900 - 2\cdot 20\cdot 30\cdot \cos(84{,}735\ldots°)} = 34{,}49\ldots$

$\simeq \boxed{34{,}5}$

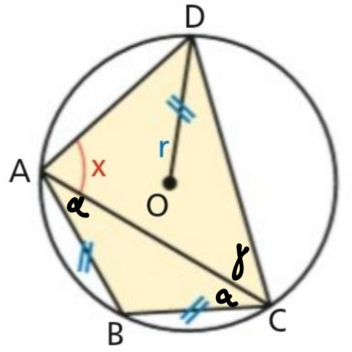
$\boxed{\beta \simeq 84{,}7° \qquad AA' \simeq 34{,}5 \text{ m}}$

<u>OSSERVAZIONE</u> Per calcolare $\cos\beta$ si poteva fare così:

$\cos\beta = \cos(120° - \gamma) = \cos 120° \cdot \cos\gamma + \sin 120° \cdot \sin\gamma = \ldots$

332 La circonferenza della figura ha raggio 2. Calcola l'area $A(x)$ del quadrilatero $ABCD$ e determina per quale valore di x si ha $A(x) = \sqrt{3}$.

$\left[x = 0, x = \frac{2}{3}\pi\right]$



$$\overline{BC} = 2r \sin\alpha$$

$$r = 2r \sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\hat{B} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

$$\hat{D} = \pi - \hat{B} = \pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$$

perché ABCD è inscritto nella circonf. e ha gli angoli opposti supplementari

$$x + \gamma + \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\hat{D}} = \pi$$

$$x + \gamma = \pi - \frac{\pi}{3} \qquad x + \gamma = \frac{2}{3}\pi$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$$

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_{ABC}(x) + \mathcal{A}_{ACD}(x) = \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AB}\cdot\sin\hat{B} + \mathcal{A}_{ACD}(x)$$

$\mathcal{A}(x)$ ↓ area di ABCD

$\mathcal{A}_{ABC}(x)$ ↓ in realtà non dipende da x

TH. CORDA

$$\overline{AC} = 2r\sin\hat{D} = 2r\sin\frac{\pi}{3} = 2r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$$

$$\overline{AD} = 2r\sin\gamma = 2r\sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right)$$

$$\mathcal{A}_{ACD}(x) = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot\sin x = \frac{1}{\cancel{2}}(r\sqrt{3})\left(\cancel{2}r\sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right)\right)\cdot\sin x =$$

$$= r^2\sqrt{3}\cdot\sin x\cdot\sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right)$$

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}r^2\cdot\sin\frac{2}{3}\pi + r^2\sqrt{3}\sin x\cdot\sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right)$$

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin\frac{2}{3}\pi + r^2\sqrt{3}\sin x \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,r^2}{4} + \sqrt{3}\,r^2 \sin x \sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right)$$

$$r = 2 \implies \mathcal{A}(x) = \sqrt{3} + 4\sqrt{3}\sin x \sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right)$$

$$0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$$

$$\mathcal{A}(x) = \sqrt{3} \implies \cancel{\sqrt{3}} + 4\sqrt{3}\sin x \sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) = \cancel{\sqrt{3}}$$

$$\cancel{4\sqrt{3}}\sin x \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) = 0$$

$\Downarrow$ legge di annullamento del prodotto

$$\sin x = 0 \quad \vee \quad \sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\frac{2}{3}\pi - x = k\pi$$

$$x = k\pi$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + k\pi$$

$\Downarrow$ perché $0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ $\Downarrow$

$$x = 0$$

$$x = \frac{2}{3}\pi$$

$$\boxed{x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{2}{3}\pi}$$