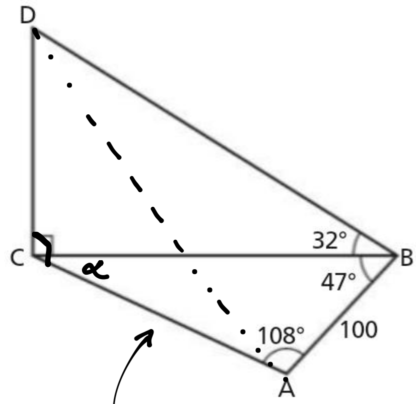
39 **Triangolazioni** Luca vuole stimare l'altezza CD di un faro posto su un'isola e procede fissando due punti A e B sulla terraferma alla stessa quota della base C del faro ed eseguendo le misure che seguono:

$$AB = 100 \text{ m}, \ B\widehat{A}C = 108°, \ A\widehat{B}C = 47° \text{ e } C\widehat{B}D = 32°.$$

Trova l'altezza CD del faro e l'ampiezza dell'angolo $C\widehat{A}D$.

$[CD \simeq 140{,}6 \text{ m}; C\widehat{A}D \simeq 39°]$



ABC è sul piano orizzontale
CBD è sul piano verticale

$$\alpha = 180° - 108° - 47° = 25°$$

$$\text{TH. SENI} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\sin 25°} = \frac{\overline{CB}}{\sin 108°}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{CB} = \frac{\sin 108°}{\sin 25°} \overline{AB} = 225{,}039\ldots$$

$$\overline{DC} = \overline{CB} \cdot \tan 32° = \frac{\sin 108°}{\sin 25°} 100 \cdot \tan 32° = 140{,}62\ldots \simeq 140{,}6$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{DC \cong 140{,}6 \text{ m}}$$

$$\overline{CA} \cdot \tan C\hat{A}D = \overline{DC} \Rightarrow \tan C\hat{A}D = \frac{\overline{DC}}{\overline{CA}}$$

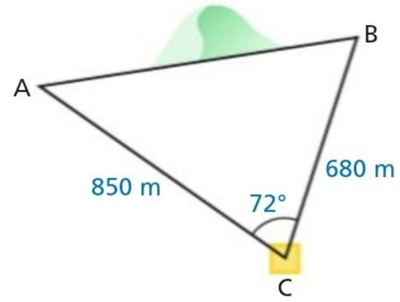
$$C\hat{A}D = \arctan\left(\frac{\overline{DC}}{\overline{CA}}\right)$$

$$\text{TH. SENI} \quad \frac{\overline{AC}}{\sin 47°} = \frac{\overline{AB}}{\sin 25°} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{\sin 47°}{\sin 25°} \overline{AB}$$

$$C\hat{A}D = \arctan\left(\frac{\overline{DC}}{\frac{\sin 47°}{\sin 25°}\overline{AB}}\right) = \arctan\left(\frac{\overline{DC} \cdot \sin 25°}{\overline{AB} \cdot \sin 47°}\right) =$$

$$= \arctan(0{,}81258\ldots) = 39{,}0967\ldots° \simeq \boxed{39°}$$

358 **REALTÀ E MODELLI** **Guardando la torre** Calcola la distanza fra due case separate da una collina scegliendo come punto di riferimento una torre che dista dalle due case rispettivamente 850 m e 680 m. Le direzioni in cui dalla torre si vedono le due case formano tra loro un angolo di 72°. [909,77 m]



$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 - 2\,\overline{AC}\,\overline{CB}\cos 72^\circ} = \sqrt{850^2 + 680^2 - 2\cdot 850\cdot 680\cdot \cos 72^\circ} =$$

$$= 909{,}767\ldots = 909{,}77 \Rightarrow \boxed{AB \cong 909{,}77 \text{ m}}$$

343 In un trapezio isoscele *ABCD* la base minore *CD* e i lati obliqui hanno lunghezza 2, gli angoli acuti hanno ampiezza $\frac{\pi}{3}$. Sia *P* un punto del lato obliquo *BC*, *H* la sua proiezione su *AB*. Posto $P\widehat{A}B = x$:

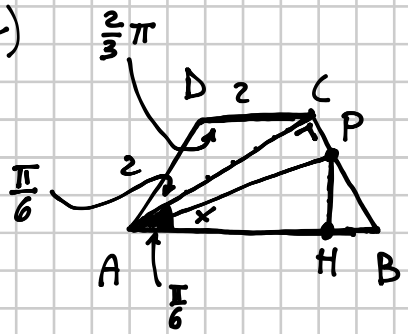
a. esprimi la funzione $f(x) = \frac{\overline{PC}}{\overline{PH}}$;

b. calcola per quale valore di x risulta $\overline{PC} = \overline{PH}$;

c. indipendentemente dal problema geometrico studia il dominio e il segno della funzione $f(x)$.

$\left[\text{a) } f(x) = \frac{1}{2}(\cot x - \sqrt{3}), \text{ con } 0 < x \le \frac{\pi}{6}; \text{ b) } \frac{\pi}{12}; \text{ c) } x \ne k\pi,\ f(x) \ge 0 \text{ per } k\pi < x \le \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

a)

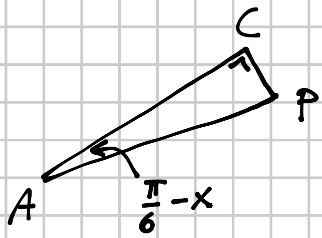


$0 < x \le \frac{\pi}{6}$

0 va escluso perché $\overline{PH} \ne 0$ (denominatore)

$P\hat{C}A = \frac{\pi}{2}$ (perché $\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{6}$)

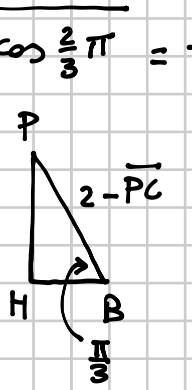
Considero il triangolo APC



$\overline{CP} = \overline{AC}\cdot \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2\,\overline{AD}\cdot\overline{DC}\cdot\cos\frac{2}{3}\pi} = \sqrt{4 + 4 - 8\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$\overline{PC} = 2\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$



$$\overline{PH} = \left(2 - \overline{PC}\right)\cdot \sin\frac{\pi}{3} =$$

$$= \left[2 - 2\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right]\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{PC} = 2\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right) \qquad \overline{PH} = \left[2-2\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right]\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 < x \le \frac{\pi}{6}$$

$$f(x) = \frac{\overline{PC}}{\overline{PH}} = \frac{2\cancel{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\left[2-2\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right]\cdot\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}} = \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{1-\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right)} =$$

$$= \frac{2}{\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}-\sqrt{3}} = \frac{2}{\dfrac{1}{\dfrac{\tan\frac{\pi}{6}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{6}\cdot\tan x}}-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{\dfrac{1}{\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}-\tan x}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\tan x}}-\sqrt{3}} = \frac{2}{\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\tan x}{\frac{\sqrt{3}}{3}-\tan x}-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{\dfrac{\cancel{1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\tan x-\cancel{1}+\sqrt{3}\tan x}{\frac{\sqrt{3}}{3}-\tan x}} = \frac{\cancel{2}}{\dfrac{2\frac{\sqrt{3}}{3}\tan x}{\frac{\sqrt{3}}{3}-\tan x}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}-\tan x}{2\frac{\sqrt{3}}{3}\tan x} =$$

$$= \frac{\cancel{\frac{\sqrt{3}}{3}}}{2\cancel{\frac{\sqrt{3}}{3}}\tan x} - \frac{\cancel{\tan x}}{2\frac{\sqrt{3}}{3}\cancel{\tan x}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\cot x-\sqrt{3}\right)$$

b) $f(x) = \frac{1}{2}(\cot x - \sqrt{3}) \qquad 0 < x \leq \frac{\pi}{6}$

$\overline{PC} = \overline{PH} \implies f(x) = 1$

$$\frac{1}{2}(\cot x - \sqrt{3}) = 1$$

$$\cot x - \sqrt{3} = 2$$

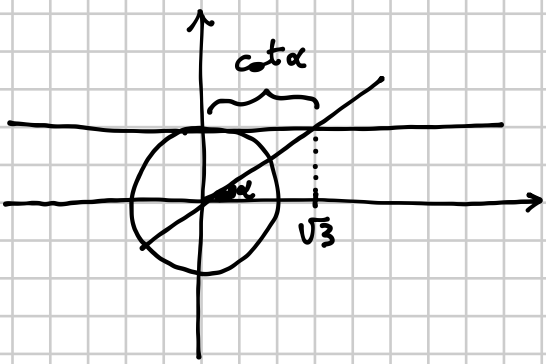
$$\cot x = 2 + \sqrt{3} \implies x = \frac{\pi}{12}$$

c) $f(x) = \frac{1}{2}(\cot x - \sqrt{3})$ DOMINIO (indipendente dal problema geometrico) $= D = \{ x \mid x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \}$

la cotangente esiste quando $\sin x \neq 0$

SEGNO

$f(x) > 0 \qquad \frac{1}{2}(\cot x - \sqrt{3}) > 0 \implies \cot x - \sqrt{3} > 0 \qquad \cot x > \sqrt{3}$



$0 < x < \frac{\pi}{6}$

con la periodicità

$$\boxed{k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi}$$

ZERI

$f(x) = 0 \qquad x = \frac{\pi}{6} + k\pi$