EQUAZIONI DI 3° GRADO

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

$z = x - \frac{a}{3}$ (SOST. DI VARIABILE)

$$\boxed{x^3 + px + q = 0}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

(FORMULA DI CARDANO (1545) - ARS MAGNA)
IN REALTÀ DOVUTA A TARTAGLIA

Applichiamola all'eq. $x^3 - 3x = 0$ (di soluzioni $0, \pm\sqrt{3}$)

$p = -3$
$q = 0$ $\Rightarrow$ $x = \sqrt[3]{\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-1}}$ che NON HA SENSO !!

Eppure, se sostituiamo nell'eq. $x^3 - 3x = 0$ "facendo finta di niente" (denotiamo $\sqrt{-1} = i$)

$$\left(\sqrt[3]{i} + \sqrt[3]{-i}\right)^3 - 3\left(\sqrt[3]{i} + \sqrt[3]{-i}\right) =$$

$$= i + 3\sqrt[3]{-i^3} + 3\sqrt[3]{i^3} - i - 3\sqrt[3]{i} - 3\sqrt[3]{-i} = 0$$

IDEA $\rightsquigarrow$ inventare un simbolo per $\sqrt{-1} = i$

i è tale che $\boxed{i^2 = -1}$

PER QUESTO NUMERO VOGLIAMO CHE VALGANO LE "REGOLE ORDINARIE" DELL'ALGEBRA!

VOGLIAMO INOLTRE AMPLIARE IL SISTEMA NUMERICO $\mathbb{R}$ CON QUESTO NUOVO NUMERO i

OSSERVAZIONE
$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$
....

Quindi il nuovo insieme numerico, detto INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI $\mathbb{C}$ basta che contenga oggetti del tipo
$$\boxed{a + ib} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ perché $a + ib$ è REALE se e solo se $b = 0$

L'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$, ma ha 2 soluzioni in $\mathbb{C}$: $\pm i$, infatti $i^2 + 1 = 0$ e $(-i)^2 + 1 = 0$

COME SI DOVREBBERO COMPORTARE LA SOMMA E IL PRODOTTO DI NUMERI COMPLESSI

$$z_1 = a + ib \qquad z_2 = c + id \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{z_1 + z_2 = a + ib + c + id = (a+c) + i(b+d)} \quad \text{SOMMA}$$

$$z = \underbrace{a}_{\substack{\text{PARTE REALE} \\ \text{DI } z}} + i\underbrace{b}_{\substack{\text{PARTE IMMAGINARIA} \\ \text{DI } z}}$$

$$a = \mathrm{Re}(z) \qquad b = \mathrm{Im}(z)$$

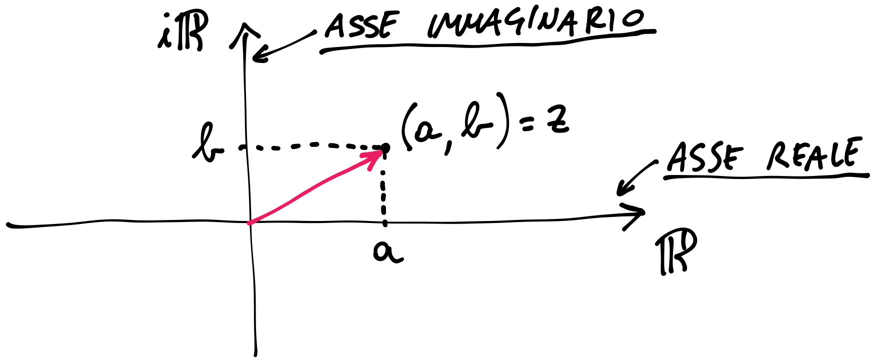
Il numero i si chiama UNITÀ IMMAGINARIA $(i^2 = -1)$

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc + i^2 bd = \\ &= ac + iad + ibc - bd = (ac - bd) + i(ad + bc) \end{aligned}}$$

INTRODUZIONE FORMALE DI $\mathbb{C}$

DEFINIZIONE
Chiamiamo **numero complesso** ogni coppia ordinata $(a; b)$ di numeri reali.

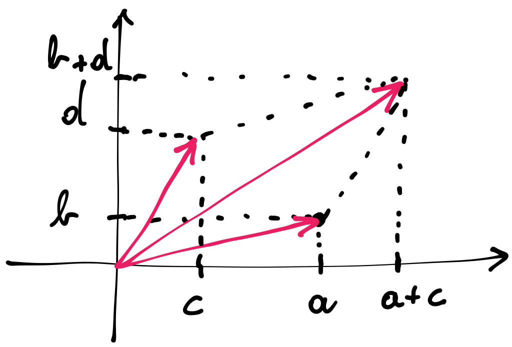
Possiamo anche dire che un numero complesso è un qualsiasi elemento dell'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.



DEFINIZIONE
Somma di numeri complessi
Dati due numeri complessi $(a; b)$ e $(c; d)$, la loro somma è il numero complesso definito dalla coppia $(a + c; b + d)$.

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$$

REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA



- VALE LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA
- L'ELEMENTO NEUTRO È $(0,0)$

  $(a,b) + (0,0) = (a,b)$
- L'OPPOSTO DI (a,b) È $(-a,-b)$

DEFINIZIONE

Prodotto di due numeri complessi

Dati due numeri complessi $(a; b)$ e $(c; d)$, il loro prodotto è il numero complesso definito dalla coppia $(ac - bd; ad + bc)$.

$$(a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$$

IDENTIFICHIAMO I NUMERI DEL TIPO $(a, 0)$ CON I NUMERI REALI

$$(a, 0) \longmapsto a$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) \longmapsto a \cdot b$$

$$\Downarrow$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab - 0, a \cdot 0 - 0 \cdot b) = (ab, 0)$$

Prendiamo il numero $(0, 1)$ e facciamone il quadrato

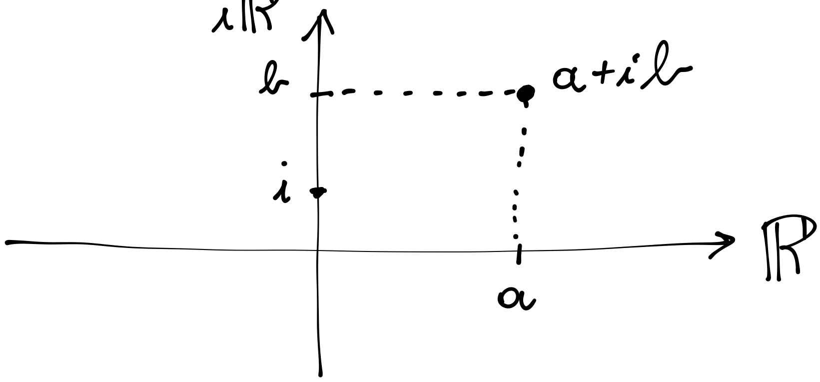
$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \longmapsto -1$$

$(0, 1) = i \qquad i^2 = -1 \qquad i =$ UNITÀ IMMAGINARIA

$$(a, b) = \underbrace{(a, 0)}_{a \in \mathbb{R}} + \underbrace{\overbrace{(0, 1)}^{i}\overbrace{(b, 0)}^{b \in \mathbb{R}}}_{(0, b)}$$

$$\boxed{(a, b) = a + ib}$$

FORMA ALGEBRICA DEL NUMERO COMPLESSO (a, b)



$z = (a, b) = a + ib$

I numeri del tipo $(a, 0) = a + i \cdot 0 = a$ sono <u>numeri reali</u>

I numeri del tipo $(0, b) = 0 + ib = ib$ sono <u>numeri immaginari</u>

CALCOLARE LA SOMMA E IL PRODOTTO DEI SEGUENTI NUMERI COMPLESSI

31 $(4; 1)$; $(2; 0)$.

32 $(1; -2)$; $(-1; 3)$.

31) $z_1 = (4, 1) = 4 + i \qquad z_2 = (2, 0) = 2 \in \mathbb{R}$

$$z_1 + z_2 = 4 + i + 2 = 6 + i = (6, 1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 + i) \cdot 2 = 8 + 2i = (8, 2)$$

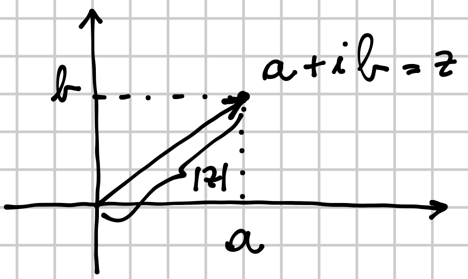
32) $z_1 = (1, -2) = 1 - 2i \qquad z_2 = (-1, 3) = -1 + 3i$

$$z_1 + z_2 = \cancel{1} - 2i - \cancel{1} + 3i = i = (0, 1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 - 2i)(-1 + 3i) = -1 + 3i + 2i - 6\overbrace{i^2}^{-1} =$$

$$= -1 + 5i + 6 = 5 + 5i = (5, 5)$$

MODULO DI UN NUMERO COMPLESSO



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Calcola il modulo dei seguenti numeri complessi.

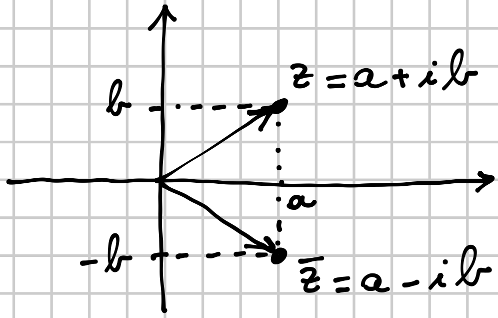
53 i; $\quad 3 + 4i$; $\quad 5$; $\quad 1 - i$.

$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \qquad |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$|5| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5 \qquad |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Dato il numero $z = a + ib$, si dice <u>NUMERO COMPLESSO CONIUGATO di z</u> il numero

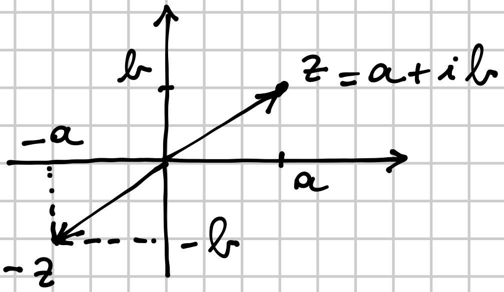
$$\bar{z} = a - ib$$



Il numero <u>OPPOSTO DI z</u> è

$$-z = -a - ib$$

$$z + (-z) = 0$$



61 Scrivi il complesso coniugato e l'opposto dei seguenti numeri complessi.

$3 - 6i$; $\quad 2 + \sqrt{3}\,i$; $\quad \frac{1}{3} - i$; $\quad -1 + i$; $\quad -\frac{1}{4} - 2i$.

$\bar{z}$	$3 + 6i$	$2 - \sqrt{3}\,i$	$\frac{1}{3} + i$	$-1 - i$	$-\frac{1}{4} + 2i$
$-z$	$-3 + 6i$	$-2 - \sqrt{3}\,i$	$-\frac{1}{3} + i$	$+1 - i$	$+\frac{1}{4} + 2i$
				$1 - i$	$\frac{1}{4} + 2i$

89 $\dfrac{i^{31} - 5i^{39} + 4i^{47}}{2i^{21} + 3i^{41}} = \dfrac{-i + 5i - 4i}{2i + 3i} = \dfrac{0}{5i} = 0$ [0]

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$$i^{31} = i^{28} \cdot i^3 = (i^4)^7 \cdot i^3 = 1^7 \cdot (-i) = -i$$

$$i^{39} = i^3 = -i$$

RESTO DELLA DIVISIONE DI 39 PER 4

IN GENERALE:

$i^n = i^r$ ← resto della divisione di n per 4

$i^{47} = i^3 = -i \qquad i^{21} = i \qquad i^{41} = i$