195 $|i+z|^2 - i = 2$ [impossibile]

$z = a + ib$

$|z|^2 = a^2 + b^2$

$z = a + ib$

$|i + a + ib|^2 - i = 2$

$|a + i(b+1)|^2 - i = 2$

$a^2 + (b+1)^2 - i = 2$

$a^2 + b^2 + 1 + 2b - i = 2$

$\underbrace{a^2+b^2+2b-1}_{\text{PARTE REALE}} - i = 0$

un numero complesso $z = a + ib$
è uguale a 0 sse $a=0$ e $b=0$

↓

IMPOSSIBILE perché la parte immaginaria
non può essere nulla

196 $|i+z|^2 - i - 2 = z$ [$2-i; -1-i$]

$z = a + ib$

$|i + a + ib|^2 - i - 2 = a + ib$

$|a + i(b+1)|^2 - i - 2 = a + ib$

$a^2 + (b+1)^2 - i - 2 = a + ib$

$a^2 + b^2 + 1 + 2b - i - 2 - a - ib = 0$

$\underbrace{a^2+b^2-1+2b-a}_{\text{PARTE REALE}} + i\underbrace{(-1-b)}_{\text{PARTE IMMAGINARIA}} = 0$

$\begin{cases} a^2+b^2-1+2b-a=0 \\ -1-b=0 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2+\cancel{1}-\cancel{1}-2-a=0 \\ b=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2-a-2=0 \\ b=-1 \end{cases}$

$$\begin{cases} a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} \dfrac{1-3}{2} = -1 \\ \dfrac{1+3}{2} = 2 \end{cases} \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \qquad z = a + ib$$

$$\boxed{z = -1 - i \quad \vee \quad z = 2 - i}$$

197 **TEST** Si denoti con $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, un generico numero complesso. Qual è l'insieme delle soluzioni di $|z+1|z = \bar{z}$?

A $\{0 \leq x \leq 2, y = 0\}$

B $\{-2 \leq x \leq 0, y = 0\}$

C $\{0\} \cup \{2\}$

~~D~~ $\{0\} \cup \{-2\}$

(*Università di Trento, Facoltà di Scienze*)

NOTA: per risolvere il TEST basta provare a sostituire alcuni valori opportuni nell'equazione
- $z = 1$ falsifica la $\boxed{A}$
- $z = -1$ falsifica la $\boxed{B}$
- $z = 2$ falsifica la $\boxed{C}$

$\Rightarrow$ per esclusione la risposta corretta è la $\boxed{D}$

$$|z+1|z = \bar{z}$$

moltiplico per z entrambi i membri

$$|z+1|z \cdot z = \bar{z} \cdot z$$

$$\underbrace{|z+1|}_{\text{numero reale}} z^2 = \underbrace{|z|^2}_{\text{numero reale}}$$

$z = x + iy$

OSSERVAZIONE

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Dato che il modulo di un numero complesso è un numero reale, anche z^2 deve essere reale:

affinché sia z^2 reale

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \Longrightarrow 2xy = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee y = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow z = x + i \cdot 0 = x \Longrightarrow |x+1|x = x \Longrightarrow x = 0 \vee |x+1| = 1$$

SOSTITUISCO NELL'EQUAZIONE

$$\Downarrow$$

$$x = 0 \vee x + 1 = \pm 1 \Longrightarrow x = 0 \vee x = -2$$

$x=0 \Rightarrow z=0+iy \Rightarrow z=iy \xRightarrow{\text{SOSTITUENDO NELL'EQUAZIONE}} |iy+1|(iy)=-iy$

$$\Downarrow$$

$$|1+iy|\,\cancel{iy}=-\cancel{iy} \quad \vee \quad y=0$$

$$\sqrt{1+y^2}=-1 \quad \text{IMPOSS.}$$

$$x=0 \quad y=0 \quad \vee \quad x=-2 \quad y=0$$

$$z=0 \quad \vee \quad z=-2$$

controlliamo che siano effettivamente soluzioni dell'equazione $|z+1|\,z=\bar{z}$

$z=0 \Rightarrow |0+1|\cdot 0=0 \Rightarrow 0=0$ OK

$z=-2 \Rightarrow |-2+1|\cdot(-2)=-2 \Rightarrow -2=-2$ OK

$$\boxed{z=0 \quad \vee \quad z=-2}$$