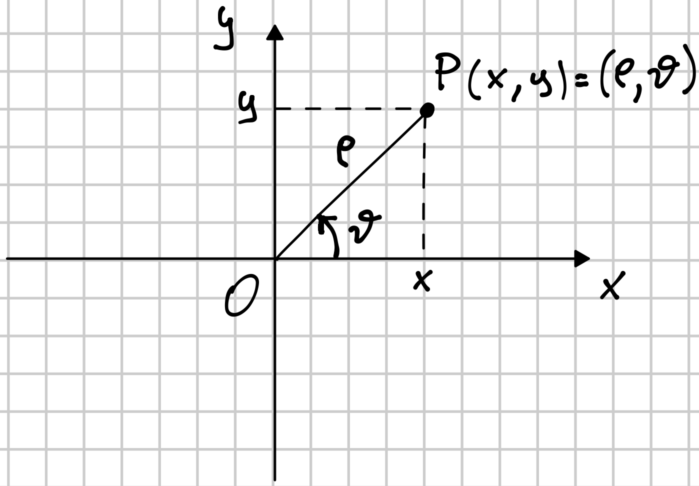
COORDINATE POLARI



$\rho \geq 0 \rightarrow$ DISTANZA $\overline{OP}$

ϑ (IN RADIANTI) $\rightarrow$ ANGOLO TRA LA SEMIRETTA OP E IL SEMIASSE X POSITIVO

$\downarrow$

non è univocamente individuato

$(\vartheta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$

Se $P \equiv O$, allora $\rho = 0$ e ϑ è indeterminato

ρ, ϑ sono le COORDINATE POLARI del punto P

RELAZIONI FRA LE COORDINATE POLARI E LE COORDINATE CARTESIANE

$P(\rho,\vartheta) \rightsquigarrow P(x,y)$

$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \sin\vartheta \end{cases}$$

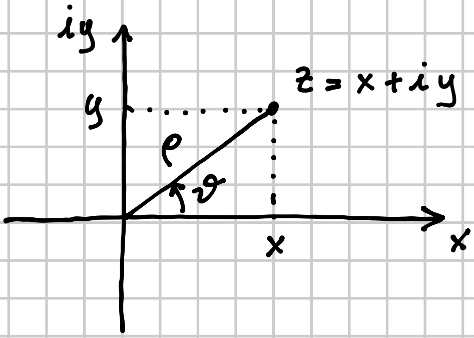
$P(x,y) \rightsquigarrow P(\rho,\vartheta)$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\vartheta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

TENENDO CONTO DEL QUADRANTE IN CUI SI TROVA P

UNO DEI POSSIBILI VALORI DI ϑ (GENERALMENTE SI USA $\vartheta \in [0, 2\pi)$)

FORMA TRIGONOMETRICA DI UN NUMERO COMPLESSO



Il numero complesso

$$z = x + iy$$

si può scrivere

$$z = \rho\cos\vartheta + i\rho\sin\vartheta =$$

$$= \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

$$\boxed{z = \underbrace{\rho}_{|z| = \text{MODULO DI } z}(\cos\underbrace{\vartheta}_{\text{ARGOMENTO}} + i\sin\vartheta)}$$

FORMA TRIGONOMETRICA DEL NUMERO COMPLESSO

SCRIVERE IN FORMA TRIGONOMETRICA

251 $6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}\,i$ $\left[12\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$z = \underbrace{6\sqrt{2}}_{x} + \underbrace{6\sqrt{2}}_{y}\,i$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2} =$$

$$= \sqrt{2(6\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 12$$

$$\tan\vartheta = \frac{y}{x}$$

Il numero z è nel 1° quadrante, quindi $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \vartheta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$z = 12\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

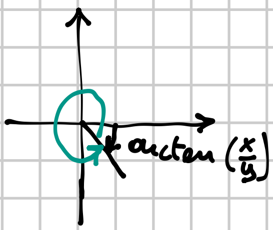
255 $2-2\sqrt{3}\,i$ $\left[4\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)\right]$

$x=2 \quad y=-2\sqrt{3}$ IV QUADRANTE $\frac{3}{2}\pi<\vartheta<2\pi$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}=4$$

$$\tan\vartheta=\frac{y}{x}=\frac{-2\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$$

$$\vartheta=\arctan(-\sqrt{3})+2\pi=$$
$$=-\arctan\sqrt{3}+2\pi=$$
$$=-\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5}{3}\pi$$



$$z=4\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$$

SCRIVERE IN FORMA ALGEBRICA

263 $\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$ $\left[-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$

$$z=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

PRODOTTO DI DUE NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA

$$z_1 = \rho_1 (\cos\vartheta_1 + i \sin\vartheta_1) \qquad z_2 = \rho_2 (\cos\vartheta_2 + i \sin\vartheta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 (\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2 \left[\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\right] =$$

$$= \rho_1\rho_2 \left[(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) + i(\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_2\cos\vartheta_1)\right] =$$

$$= \underbrace{\rho_1\rho_2}\left[\cos\underbrace{(\vartheta_1+\vartheta_2)} + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)\right]$$

IL MODULO DI $z_1 z_2$ È IL PRODOTTO DEI MODULI DI z_1 E z_2

L'ARGOMENTO DI $z_1 z_2$ È LA SOMMA DEGLI ARGOMENTI DI z_1 E z_2

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right) \qquad z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 3\cdot 5 \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 15\left(\cos\frac{10}{21}\pi + i\sin\frac{10}{21}\pi\right)$$

ANALOGAMENTE

POTENZA DI UN NUMERO COMPLESSO

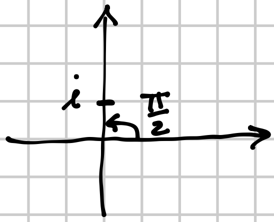
$$z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \qquad \boxed{z^n = \rho^n(\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta))}$$

FORMULA DI DE MOIVRE

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\vartheta_1-\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)\right)$$

Scriviamo in modo esplicito $(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = \cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)$

OSSERVAZIONE



$$i = (0,1) = \underbrace{1}_{\rho = 1} \cdot \left(\cos \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\vartheta = \frac{\pi}{2}} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$z = \rho \left(\cos \vartheta + i \sin \vartheta \right)$$

$$z \cdot i = \rho \cdot 1 \cdot \left(\cos \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right) \right) = \rho \left(\cos \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

quindi moltiplicare un numero complesso z per i significa ruotare il vettore che lo individua di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario